Sebuah Cerita Fable untuk Memahami Eigenvalues berjudul “Faktor Pembesaran dari Mesin Pembesar adalah Eigenvalues”

- ✧ Author: Prof Yukari Shirota (Gakushuin University, Faculty of Economics)
- ✧ Translator of the Indonesia version: Mr Muhammad Firdaus Lubis (University of Indonesia, Faculty of Engineering)
- ✧ Supervisor of the translation: Prof Riri Fitri Sari (University of Indonesia, Faculty of Engineering)

Saya ingin tahu bagaimana anda mempelajari *eigenvalues* ketika kuliah Aljabar Linear.

Pertama-tama, diberikan suatu matriks, lalu anda akan menghitung eigenvalues matriks tersebut. Kemudian, anda akan mencari *eigenvector* untuk masing-masing eigenvalues dan mendapatkan matriks diagonalnya. Banyak dari anda yang mungkin mempelajari *eigenvalues* mengikuti langkah-langkah ini.

Namun, benarkah pendekatan tersebut membantu anda dalam mengerti konsep eigenvalues? Tahukan anda bahwa *eigenvalues* bersifat invariant terhadap perubahan basis dari matriks?

Jika anda adalah seorang mahasiswa Departemen Matematika, anda bisa jadi berulang kali mendengar istilah *eigenvalues* pada kuliah-kuliah anda. Kemudian, anda akan mampu memahami konsep tersebut secara mandiri. Namun, saya penasaran bagaimana mahasiswa dari Departemen lain akan bisa memahami konsep tersebut. Saya tidak yakin bahwa penjelasan satu atau dua kali akan membantu anda dalam memahami konsep tersebut.

Saya mengajar matematika di Departemen Administrasi. Dapat dimaklumi bahwa mahasiswa-mahasiswa tersebut tidaklah memiliki kemampuan matematika sebagus mahasiswa dari Departemen Matematika. Namun, mereka tetap harus mempelajari eigenvalues untuk melakukan analisis data multivariant. Untuk membantu mahasiswa tersebut memahami eigenvalues, saya membuat suatu alat bantu untuk penjelasan. Kata kuncinya adalah faktor pembesaran dari mesin pembesar. Saya akan sangat berterima kasih jika anda membaca cerita fabel yang saya buat berikut ini.

Menggunakan metode pembelajaran ini, banyak mahasiswa yang berhasil memahami konsep eigenvalues. Karena saya rasa metode ini efisien, saya ingin menyebarkannya. Saya telah menulis cerita fabel berikut. Sekarang saya akan memulai bercerita.

Faktor Pembesaran dari Mesin Pembesar adalah Eigenvalues

Pada jaman dahulu kala, terdapat sebuah kerajaan binatang. Kerajaan tersebut memiliki 5 buah Negara: CENTRE, SOUTH, EAST, NORTH, dan WEST.

Seperti yang anda ketahui, ruang dimana kita tinggal adalah ruang 3 dimensi. Namun, agar lebih sederhana dalam penjelasan nantinya, mari kita anggap bahwa kerajaan binatang adalah ruang 2 dimensi.

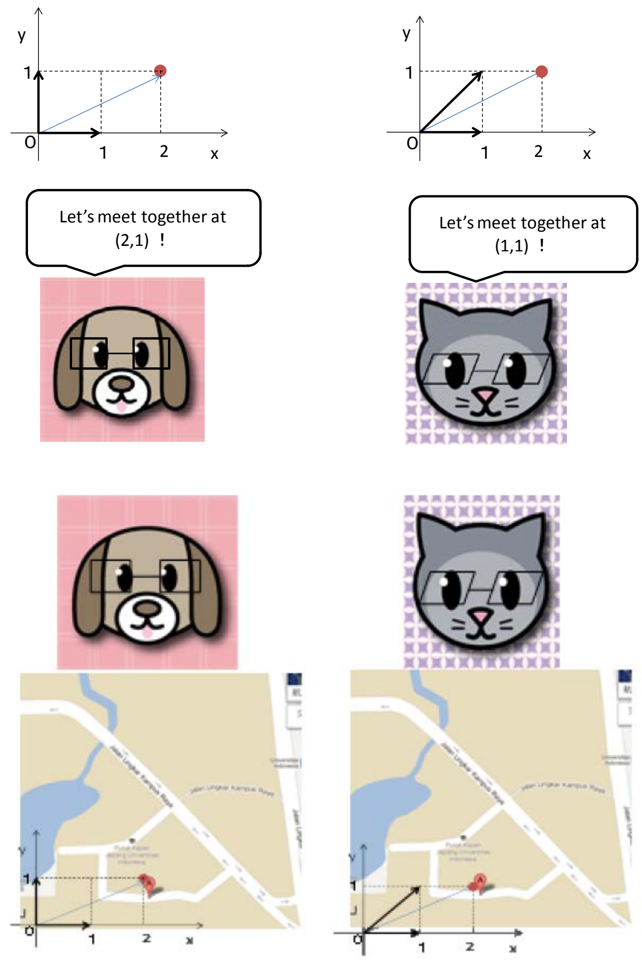
Pada dunia 2 dimensi, dunia berbentuk bidang datar. Tidak ada konsep mengenai ketinggian. Mereka dapat merasakan apa yang dimaksud dengan ketinggian seperti kita tidak dapat merasakan dimensi ke-4. (Tidak perlu anda pikirkan dunia 2 dimensi tersebut secara mendetil. Saya mengadopsi dan menggunakan dunia 2 dimensi hanya untuk menyederhanakan pendeskripsian matriks tersebut).

CENTRE adalah ibukota kerajaan Binatang. Sehingga, tidak heran jika kota tersebut menjadi pusat kebudayaan. Begitu banyak mahasiswa-mahasiswi dari negara lain yang menimba ilmu di CENTRE, terutama untuk belajar inovasi teknologi. Di CENTRE ini pulalah, seekor anjing jenius bernama Mr. Orthom, lahir di CENTRE, dan seekor kucing ramah bernama Ms Diagonary, lahir di WEST, belajar bersama di Universitas CENTRE.

Sekarang, saya akan menjelaskan sedikit mengenai basis dari ruang vektor untuk mengingatkan kembali ingatan anda mengenai hal tersebut.

Pada Aljabar Linear, terdapat istilah *basis* yang merupakan himpunan vektor-vektor bebas yang mendefinisikan suatu sistem kordinat. Diberikan suatu basis dari suatu ruang vektor, setiap elemen dari ruang vektor bisa diekspresikan secara unik sebagai kombinasi linear finite dari basis-basis.

Mari kita pikirkan basis dari negara CENTRE. Sebuah basis dari CENTRE merupakan basis orthogonal. Di sisi lain, basis dari WEST adalah diagonal. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Gambar 1 berikut:



Gambar 1 Basis untuk CENTRE adalah orthogonal sedangkan basis untuk WEST adalah diagonal

Ibarat kata, Pak Orthom mengenakan kacamata Orthogonal sedangkan Bu Diagonary mengenakan kacamata diagonal. Sehingga, ketika mengekspresikan titik yang sama, mereka merepresentasikan titik tersebut pada kordinat yang berbeda. Hal ini dikarenakan mereka menggunakan basis yang berbeda. Kordinat diekspresikan dalam bentuk (a,b) dimana a dan b adalah bilangan real. Walaupun anda mungkin penasaran mengenai bagaimana mereka bertemu, hal ini sebenarnya bukan masalah. Bahkan meskipun kordinat mereka berbeda, mereka tetap bisa bertemu di titik yang sama seperti yang ditunjukkan oleh tanda merah pada Gambar 1.

Untuk contoh yang konkrit, Pak Orthom berkata, "Mari bertemu di kordinat c = (c1,c2) = (2,1)." Lalu, Bu Diagonary menjawab, "Baik. Mari bertemu di kordinat w = (w1,w2) = (1,1)". Kordinat w didapat dari kordinat c setelah melalui perubahan basis. Secara lebih spesifik, perubahan kordinat di basis baru tersebut didapat dengan memecahkan persamaan:

$$w1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + w2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Yang mana akhirnya didapatkan w1 = 1 dan w2 = 1.

Suatu hari, di laboratorium Universitas CENTRE, Pak Orthom membuat sebuah “Magnification Machine, ” yang disebut sebagai mesin *M*. Mesin adalah sebuah penemuan besar. Masukkanlah sebuah gambar, maka sang mesin akan melipatgandakan ukurannya.

Matriks transformasi dari mesin *M* dapat diekspresikan dengan menggunakan matriks diagonal berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

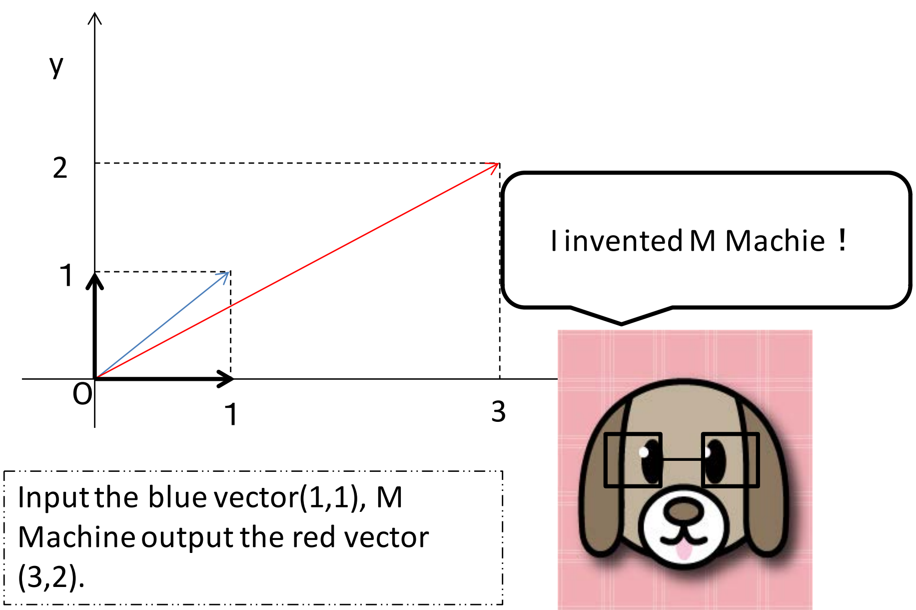
Masukkanlah vektor (1,1), mesin *M* akan mengeluarkan vektor (3,2) seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pada percobaan awal, keluaran dari mesin *M* merupakan suatu gambar yang miring yang transformasinya dapat diekspresikan, sebagai contoh, sebagai berikut:

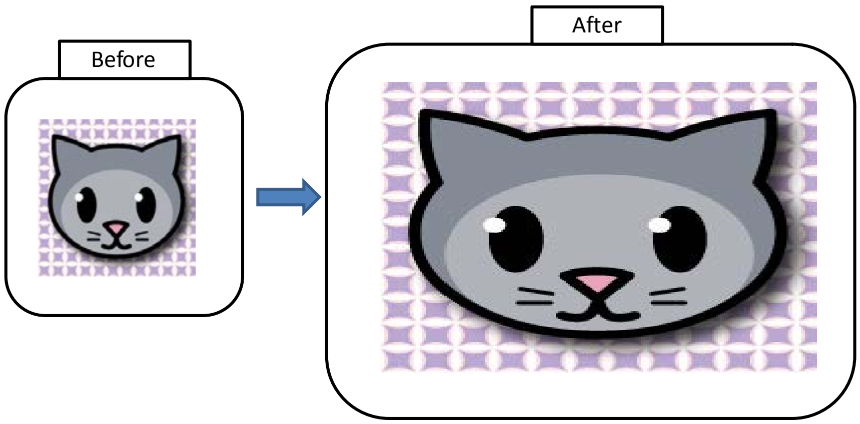
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah banyak perbaikan, Mr. Orthom berhasil menyelesaikan mesin tersebut sehingga faktor penguatan antar basis dapat didefinisikan secara terpisah. Matriksnya sendiri dapat dilambangkan sebagai suatu matriks diagonal.

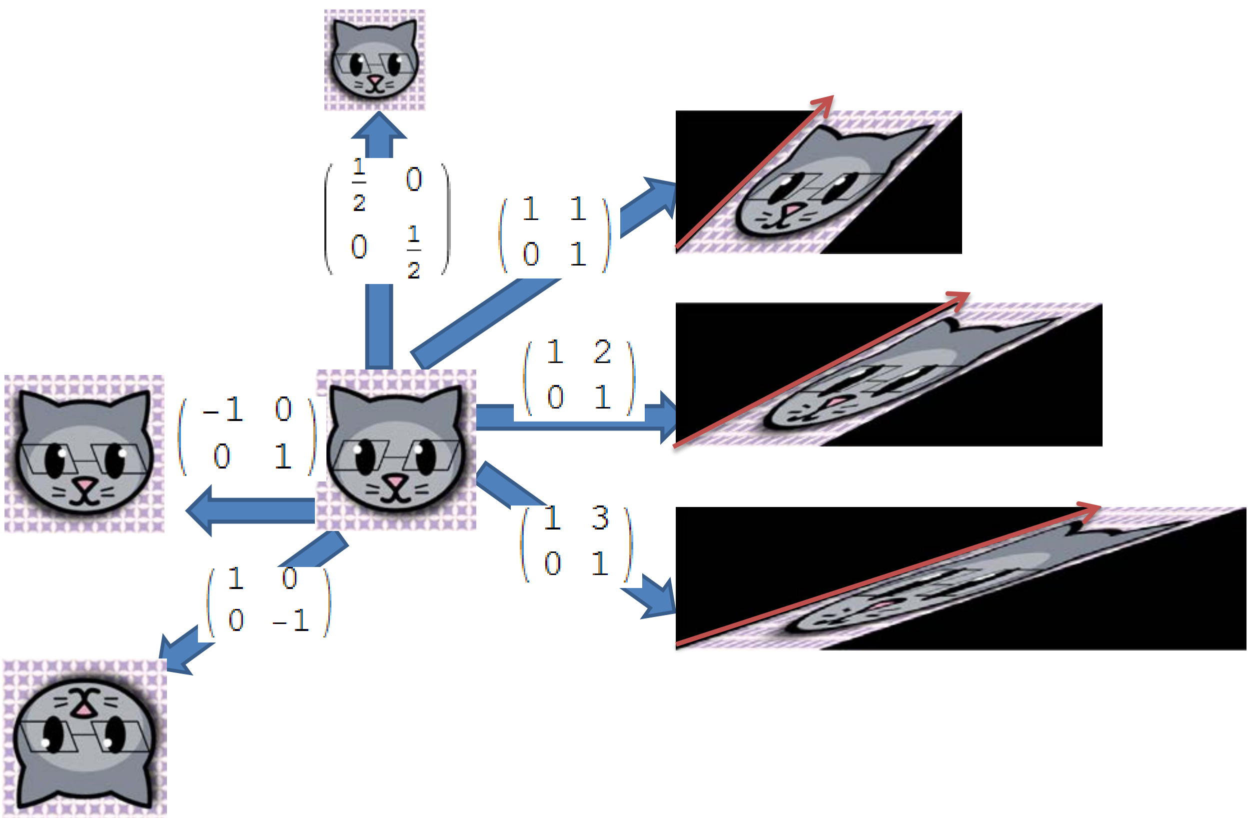


Gambar 2 Mesin M memperbesar sebuah gambar. Transformasi gambar bukanlah *shearing* maupun cerminan. Faktor pembesaran adalah tiga kali secara horizontal dan dua kali secara vertikal berdasarkan basis CENTRE

Convenient point dari mesin *M* itu sendiri adalah operasi pembesaran konstan yang disebut *scaling*, bukan *shearing*. Teknologi yang ingin dibuat adalah teknologi yang secara terpisah dapat membesarkan ukuran salah satu sumbu tanpa mempengaruhi ukuran di sumbu lainnya. Perhatikan Gambar 3.



Gambar 3 Transformasi ukuran yang diekspresikan oleh matriks $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$



Gambar 4 Berbagai macam matriks transformasi kordinat. Melihat ketiga macam hasil trasformasi pada sisi kanan, dapat dilihat bahwa telinga kanan dari kucing (0,1) dapat diekspansi secara terus-menerus

Tak perlu waktu lama untuk kabar tersebut sampai ke telinga Bu Diagonary. Bu Diagonary segera saja berlari ke laboratorium Pak Orthom. Dengan bangga, Pak Orthom pun mendemonstrasikan kemampuan alat temuannya.

Pada demonstrasi tersebut, gambar yang menjadi masukan adalah gambar wajah dari Bu Diagonary (lihat Gambar 4). Wajahnnya di sini diperbesar 3 dan 2 kali searah sumbu x dan sumbu y, secara berturu-turut. Bu Diagonary merasa bangga berteman dengan Pak Orthom. Pada saat itu pulalah, dia melihat gambar hasil pembesarannya. Namun, alangkah terkejutnya Bu Diagonary ketika dia tidak mendapati bahwa gambar wajahnya tidak membesar seperti yang diinginkan.

Hal ini dikarenakan karena yang mereka lihat adalah transformasi yang sama. Transformasi gambar yang sama diekspresikan secara berbeda oleh system kordinat yang berbeda dikarena system kordinat tersebut menggunakan basis yang berbeda. Namun, faktor penguatan yang dialami tetaplah sama (invariant) meskipun kita melakukan perubahan vektor basisnya.

Setelah berpikir beberapa menit, Pak Orthom akhirnya menemukan alasannya.

Karena vektor basis dari negara WEST berbeda dari negara CENTRE, mesin *M* tidak dapat bekerja dengan baik saat dia melihatnya dengan menggunakan sistem kordinat negaranya. Mendengar alasan ini, Bu Diagonary meminta Pak Orthom agar mengubah vektor basis yang digunakan oleh mesin tersebut menjadi vektor basis Negara WEST. Pak Orthom mengajukan ide yang lebih baik untuk menyelesaikan masalah ini:

1. Masukkan gambar dan ekspresikan dengan menggunakan kordinat WEST.
2. Interpretasikan kordinat WEST menjadi ukuran menjadi kordinat CENTRE
3. Perbesar gambar dengan menggunakan kordinat CENTRE
4. Interpretasikan kordinat CENTRE menjadi ukuran menjadi kordinat WEST
5. Gambar yang diekspresikan dalam kordinat WEST-lah yang dilihat oleh Bu Diagonary.

Sekarang, saya akan menjelaskan terlebih dahulu mengenai konsep *perubahan basis*.

Pertama-tama, mari kita cari matriks transformasi basis dari kordinat WEST ke kordinat CENTRE. Mari kita tulis ulang kordinat vektor basis dari kedua sistem kordinat: C = {(1,0),(0,1)} dan W = {(1,0),(1,1)}.

Karena C adalah basis yang standar, maka kita bisa menuliskan vektor basis W sebagai kolom-kolom penyusun matriks transformasi basis dari W ke C:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika *P* disebut matriks transformasi dari basis W ke basis C, maka P^{-1} adalah matriks transformasi dari basis C ke basis W.

Dengan menggunakan matriks *P*, mari representasikan titik (1,1) pada kordinat W ke kordinat C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kembali Gambar 1, kita bisa lihat bahwa lokasi (1,1) pada kordinat W adalah sama dengan lokasi (2,1) pada kordinat C.

Kesimpulannya, prosedur pembesaran yang benar untuk negara WEST adalah sebagaimana ke-5 langkah di atas.

Berarti, ditentukan terlebih dahulu matriks *P* dan P^{-1}:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pembesaran diekspresikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

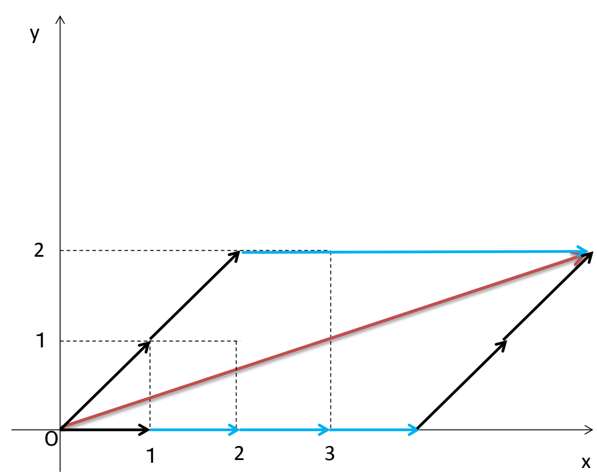
Maka, proses pembesaran gambar secara keseluruhan dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$M = P^{-1}AP$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mari kita tes apakah masukan (1,1) relatif terhadap basis W akan diperbesar 3 kali dan 2 kali di masing-masing sumbu:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Gambar 5 Transformasi pembesaran (ukuran) dari kordinat WEST (1,1) oleh matriks $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Pak Orthom berkata kepada Bu Diagonary, “Inilah matriks hasil pembesaran gambar *M* untuk negara WEST.” “Terima kasih sekali, Pak Orthom,” balas Bu Diagonary. Kemudian, Bu Diagonary pun mencoba bermacam-macam benda, baik buatan dari Negara CENTRE maupun Negara WEST, dan hasil pembesaran yang benar pun selalu didapat.

Apakah anda ingat bagaimana mencari eigenvalues dari suatu matriks?

Lambang skalar lambda merupakan *eigenvalue* yang memenuhi persamaan karakteristik:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Determinan dari A dilambangkan dengan $\det(A)$. Kemudian, dengan memecahkan persamaan:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

maka akan didapatkan eigenvalues dari matriks A, yaitu lambda = 2, 3.

Sekarang, mari kita cari eigenvalues dari matriks M yang didapatkan dari cerita di atas:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Kita didapatkan eigenvalues dari matriks M, yaitu lambda = 2, 3. Kita dapati bahwa *eigenvalues* dari matriks M adalah sama dengan *eigenvalues* dari matriks A**.** Dari contoh ini, dapat kita lihat bahwa *eigenvalues* tidaklah berubah meskipun terjadi perubahan basis (dari basis A ke basis matriks M). Dapat dilihat juga, bahwa *eigenvector* dari masing-masing *eigenvalue* adalah vektor basis.

Dapat diambil kesimpulan bahwa faktor pembesaran 3 dan 2 dari mesin $\mathbf{M}$ adalah terkait dengan eigenvalue dari matriks transformasi pembesaran. Bahkan, jika kita tambahkan fungsi interpretasi kepada mesin $\mathbf{M}$**,** yaitu matriks perubahan basis, faktor pembesaran tidaklah berubah (invariant). Ibarat kata, apabila kita ingin mencari eigenvector dari matriks transformasi penguatan $\mathbf{M}$ maka eigenvector yang didapat adalah basis-basis itu sendiri.

PERUBAHAN BASIS MENGUBAH MATRIX DAN EIGENVECTOR NAMUN EIGENVALUE TIDAK BERUBAH (INVARIANT)

Pak Orthom memodifikasi mesin $\mathbf{M}$ untuk memperbesar penggaris buatan WEST. Kemudian, untuk mengekspor hasil pembesaran dari mesin $\mathbf{M}$ ke negara lain, fungsi interpretasi kostumisasi harus ditambahkan. Dengan kata lain, kita harus mencari matrix perubahan basis dari negara CENTRE ke negara tujuan.

Inilah akhir dari cerita.

Saya ingin tahu apakah anda bisa mengerti bahwa *eigenvalues* adalah invariant terhadap perubahan basis. Sehingga, setiap kali anda menemukan *eigenvalues* ketika membaca buku matematika, saya harap anda mengingat cerita ini. Silakan menikmati berbagai perubahan basis.

TAMAT