2012 数学教育実践研究会
初夏の学習会 （6 月 23 日）

中学生からの金融数学
―ビジュアルアプローチによる数学プロセスの解説―

学習院大学 経済学部経営学科教授

白田 由香利 yukari.shirota@gakushuin.ac.jp

1. 始めに

私（白田）は、長年に渡って経済学部の学生に経営数学を教えており，いかに多くの学生が数学を苦手と感じているか，そのような学生に数学を教えることがいかに難しいか，を感じてきました．そして，数学に興味にない学生に興味をもたせる方法として，お金に関するテーマを取り上げることが有効であると，気づきました．また，数学の解法プロセスの解説に，Mathematica，Maple 等の数学ソフトウェアを使った視覚的な説明がいかに効果的であるかを痛感していました．そこで，本稿では，金融数学を視覚的に説明していきます．金融数学の基本は金利の計算です．なかでも，現在社会では複利の計算法が重要です．そこで，複利法の計算方法を中心に，金利の概念を中学生でも分かる数学レベルで，説明をしていこうと思います．

数学の視覚的な説明は，白田の 10 年来の研究テーマです．特に， 2011 年，震災の前の 2 月以来、「3 次元グラフィクスを動かせる eBook を出版したい」という思いを募らせていました．しかし，電子出版の動きが欧米に比べて遅い日本では，なかなか話が進みませんでした．そのような折，Mathematica の世界で有名な松田裕幸氏から『Mathematica クックブック』（オライリー・ジャパン）を出版した時，DTP をすべて Mathematica で行った話を伺いました．そして、オライリー・ジャパンに企画を持ち込み，「感じて理解する数学入門」という電子書籍を出版できました[1]．この本にとって技術的課題は数学ソフトウェアの問題でしたが，Wolfram CDF (Computable Document Format, 計算可能ドキュメント形式）player[1]のおかげで解決しました. CDF player をダウンロードすることで，CDF ドキュメントが無料で動かせるからです．本稿で取り上げた動くサンプルは，CDF ファイルの形式で，無料で入手可能です[2]．ぜひダウンロードして手元で動かしてみてください．

2. 複利の公式

複利法とは, 利子を繰り込んだ, 元利合計の金額を，元金として，次の利子を計算する方式です．

元利合計＝元金＋利息

問題 1

1 年間で 1 %の年利で, 銀行に 100 万円預けました．n 年後には，いくらに増えていますか？

1 年後　100×（1+0.01) = 101

2 年後　101×（1+0.01)
= ｛100×（1+0.01)｝ ×（1+0.01)
= 100 × (1+0.01) × (1+0.01)
= 102.01

n 年後　100×(1+0.01) × (1+0.01) × (1+0.01) × … ×（1+0.01)

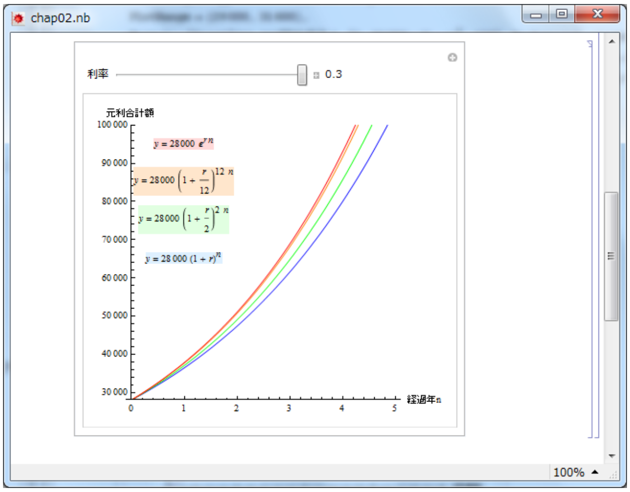
(1+0.01)を何回かけ算するかというと，n 回です．n が大きい場合，それをずっと書いていると手が疲れますので，以下のように肩に小さく”n”と書いて，n 回分のかけ算を表すことにします．

$$(1+0.01)^n$$

変数 n の部分が，大きくなるに従って，大きくなります．

$$y=(1.01)^x$$

このような x と y の関係を，1.01 を底とする指数関数と呼びます．1.01 の部分は，1 でない正の数であれば，1.01 に限らず，指数関数と呼びます．以下の図では，28000 円が複利で増えるようすを示しています．



---

1 Wolfram CDF player 無料ダウンロードサイト：http://www.wolfram.com/cdf-player/

2 オライリー．ジャパン電子書籍サイト：http://www.oreilly.co.jp/books/9784873115641/

一般に，B 円の元金を年利 r の元，複利で増やした場合，n 年後の元利合計の金額は以下のように表せます．複利の計算は 1 年に 1 回行うとします．

$$A = B \times (1 + r)^n$$

年利が 2%の場合，半年分の利息は 1%です．半分になります．ですから，半年複利で元利合計を計算すると，以下の式になります．

$$semiannually$$

$$A = B \times (1 + \frac{r}{2})^{2n}$$

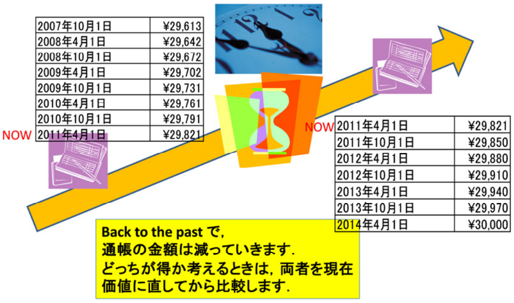
r は年利です．半年に 1 回複利計算をするので，n 年間には，2n 回の複利計算を行うことになります．それで，2n 回，かけ算をするわけです．

<u>問題 2</u>

親戚の伯父さんが，高校の入学祝金を下さいます．「 4 月の今現在(NOW)に，29000 円もらうのと，3 年後に，30000 円もらうのと，どちらがいいですか？」と聞かれました．年利は，1%と仮定する．さて，どちらが得でしょうか？　現在，それほどお金に窮してはいないと仮定します．

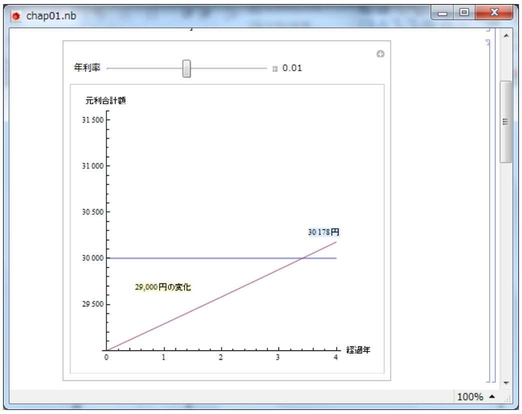
<u>ヒント：　29000 円の 3 年後の価値，つまり将来価値を計算する．</u>

NOW	2.9
1年後	2.929
2年後	2.95829
3年後	2.987873



2.9×1.01 を順に，計算していきます．3 年後には，2.98 万円となりました．どちらが得か 3 年後の価値で考えると，**3 > 2.98 で，3 年後に 3 万円をもらったほうが得であることが分かります．**

金融数学では，時間の流れの中でお金の価値を考えます．２つのお金の価値を比較するときに，複利法でお金が増えていくことを前提にします．そして，ある時刻に，両者がいくらであるかで，比較を行います．この例では，3 年後という時刻に，両者がいくらであるかを，計算しました．比較する時刻は，いつでも構いません．2 年後でも，1 年前の時刻でも構いません．しかし，多くの場合，金融数学では，現在時刻を使います．現在の価値です．これを現在価値と呼びます．



3 年後の 3 万円の，現在価値は

$$3 = B \times (1 + 0.01)^3$$

の式を B について解くと求まります．

B = 3÷1.03 = 2.91

約 2.91 万であることが，分かります．現在価値で，2.91 万と，2.9 万を比較すると，前者のほうが金額が大きいです．よって，3 年後の 3 万円のほうが，今現在もらうところの 2.9 万円よりも価値が高いことが分かります．現在でも，将来でも，同じ時刻で価値を計算して比較すれば，同じ結果が得られます．

複利法の考えは，**預金通帳をもってタイムマシンに乗ろう**，と考えると分かりやすいと思います．未来に飛んでいけば，半年複利であれば，半年ごとに利息がついて，元利合計が増えていきます．反対に，過去に飛んでいけば，預金の元利合計は減っていきます．しかし，金利が一定であれば，将来に飛んでいけば，元利合計は増えますので，過去に遡った時，金額が減るのは，もっともなことなのです．

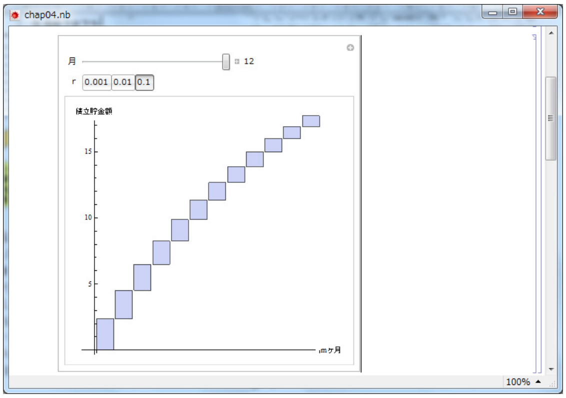
3.　積立預金の公式

<u>**問題 3**</u>

毎月決まった額を積み立てて，12 回目で 10 万にしたいと思います．年利は 1.2%　(月利は 0.1%＝0.001)です．さて，毎月いくらずつ貯金すれば，よいでしょうか？複利計算は毎月行うとします．

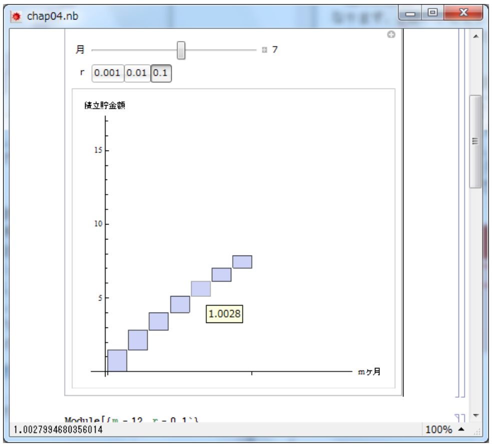
積立貯金の問題です．この問題のポイントは，貯金した月によって，利息の付き方が違ってくる点です．長

く預けておいたほうが，利息分が大きくなります．



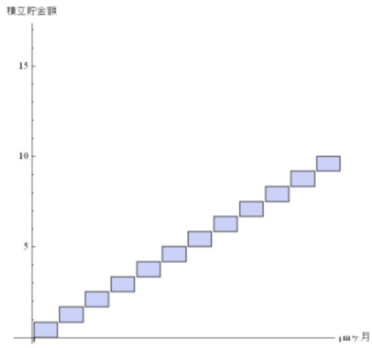
上図は，1 月あたりの金利が 10%ある場合のグラフィクスです. 月利 0.1%では, 利息分が全く見えないので, 10%でグラフィクスを描きました．初めに預けた金額は，12 か月後に大きくなっているようすが分かります. 最後の 1 回の貯金分は，利息がつきませんので，預けた金額そのものです.

この数学プロセスは，スライダーを動かして増えるようすを動きの中で見た方が理解しやすいでしょう.



横軸が，期間です．期間が経過するにつれて，初めの貯金分が複利で増えていくようすが分かります.

以下に，0.1%（＝0.001）のときの増加するようすを示しました．12 個の箱の高さの合計が 10 万になっているところに注目してください.



それでは，そのグラフィクスのメージを記憶にとどめて，数学の代数学的プロセスをみていきましょう.

1 回に x 円ずつ貯金するとします．変数 x を使います.

始めに貯金した x 円は，1 か月後に(1+r)倍になります．r はいくらでしょうか？

月利は，年利の 12 分の 1 です．そして，12 回目の貯金の時には,

$$x \times (1 + \frac{0.12}{12})^{11}$$

となります．以下に考え方の表を作りました．初回分の預金に対しては，11 か月分しか預金の期間がありませんから, 11 乗となります. 最後の 12 回目の預金は, そのままの金額で x 円となります.

回数	1回	2回		11回	12回
	x	$x(1+r)$		………	$x(1+r)^{11}$
		x		⋮	$x(1+r)^{10}$
				⋮	⋮
				x	$x(1+r)$
					x

このように期間のことなる元利合計の項目を 12 個足し合わせます. その合計が 10 万になるようにしたいのです.

$$x+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{2}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{3}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{4}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{5}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{6}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{7}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{8}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{9}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{10}+x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{11}$$

上の式＝100000

と，方程式をたてます．しかし，これを手で書いていたのでは疲れます．そこで，以下のように書きます．

$$\sum_{i=0}^{11} x\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{i}=100000$$

i=0 から，i=11 までで，項数が 12 個です．

数学では，この合計式をシグマの記号を使って，このように書くことができます．

i=0 のときの項の値はいくつですか？

$$\left(1+\frac{0.001}{12}\right)^{0}$$

これは 0 乗ですから，1 となります．ですから，x となります．

この合計の計算は，等比数列の和の公式を使って計算すると，数学ソフトウェアがなくても，電卓で計算できます．

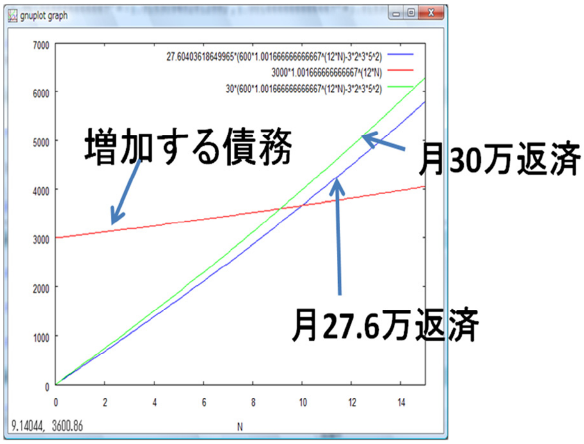
<u>等比数列の和の公式</u>

初項 x，公比 R の場合，第 n 項までの合計は以下の式で表せる．（R≠1 の場合）

$$\boxed{S_n=\frac{x(1-R^n)}{1-R}}$$

先ほどの方程式を解くと，x= 8287.5 約 8288 円ずつ毎月貯金すると，年利 1.2%の元で，10 万円になります．

住宅ローンの問題も，同じように解けます．借金(債務)が複利で増える．それと同額となるように，積立貯金をする，と考えればよいのです．グラフィクスで表すと以下のようになります．



この問題のグラフィクスの解説は，「MAXIMA による経済数学グラフィクス 10 個」[2]のサイトで紹介していますので，ぜひ，ご覧ください．

4. まとめ

難しい数学プロセスも，ビジュアルに見ていくと分かりやすくなります．本稿では，複利法の公式と，積立貯金の公式を説明しました．どちらも金融数学の重要な基本公式です．数学はグラフィクスをスライダーで動かしながら見ると，各段に分かりやすくなります．日本でも欧米のように，数学ソフトウェアでグラフィクスを動かしながら学ぶスタイルが普及することを念じています．

参考文献

[1]白田由香利，橋本隆子， 飯高茂，*感じて理解する数学入門 (e-Book)*．オライリー・ジャパン, 2012.

[2]白田由香利，橋本隆子，久保山哲二. "MAXIMA による 経済数学グラフィクス 10 個 -Bond Mathematics by Graphics- (略称 Graphics10) ";

http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/private/MAXIMA/.