2013 年 6 月 24 日、田崎晴明

「現代物理学」レポート 5

5-1. レポート 4-1 と同じ離散状態の設定で、本来の Sagawa-Ueda 等式および対応する（情報を取り入れた）第二法則を示そう。

まず、初期状態 i がカノニカル分布 (3) に従うところは同じ。ここで、系の状態を観測して結果 $\mu = 1, \ldots, m$ を得るのだが、講義で扱ったような正確な測定ではなく、確率的な誤差を伴う測定を考える。系の状態が i のとき、μ が得られる確率を $p(\mu|i)$ と書こう（これは、モデルとして与える量）。規格化条件 $\sum_{\mu=1}^{m} p(\mu|i) = 1$ が任意の i について成立する。さらに、任意の i, μ について、$p(\mu|i) \neq 0$ であることも要請する。

測定の結果、μ が得られる確率は、

$$p_\mu = \sum_{i=1}^{\Omega} p(\mu|i) p_i^{\mathrm{can}} \tag{11}$$

である。

測定結果 μ を得たら、それに応じた操作をおこなう。その際の状態の変化は 4-1 と同様、$\tau_{i\to j}^{(\mu)}$ で表現される。各々の μ について、$\tau_{i\to j}^{(\mu)}$ は (4), (5) の性質を満たす。

結局、初期状態 i、観測結果 μ、終状態 j の組が得られる確率は、

$$p_{i,\mu,j} := p_i^{\mathrm{can}}\, p(\mu|i)\, \tau_{i\to j}^{(\mu)} \tag{12}$$

である。これは、$\sum_{i=1}^{\Omega} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j=1}^{\Omega} p_{i,\mu,j} = 1$ と規格化されている。

仕事を (9) で定義するとき、Sagawa-Ueda 等式

$$\sum_{i=1}^{\Omega} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j=1}^{\Omega} p_{i,\mu,j}\, \exp\Bigl[\beta W_{i,j} + \log \frac{p_\mu}{p(\mu|i)}\Bigr] = 1 \tag{13}$$

を示せ。また、ここに Jensen 不等式を適用して得られる第二法則の不等式を書け。その際、i と μ の間の相互情報量（誤差のある測定で得られる情報量）

$$I = \sum_{i=1}^{\Omega} \sum_{\mu=1}^{m} p_i^{\mathrm{can}}\, p(\mu|i) \log \frac{p(\mu|i)}{p_\mu} \tag{14}$$

を用いること。

5-2. 同じ設定。小さな Ω について具体例を作り、仕事の期待値と相互情報量を求めよ（手計算でも数値計算でもよい）。通常の第二法則は破られるが、情報を取り入れた第二法則は成立する例になっていると望ましい。