2015 年 11 月

現代物理学　レポート 3

田崎晴明

講義とほとんど同じ設定（ϵ, u は定数）だが、周期境界条件を課した 1 粒子の問題を考える。エネルギー固有状態 $|\varphi\rangle$ の係数 φ_x についてのシュレディンガー方程式は、

$$\epsilon\varphi_x - u\{\varphi_{x+1} + \varphi_{x-1}\} = E\varphi_x \tag{1}$$

である。ここで $x = 1, \ldots, L$ だが、はみでたところについては、$\varphi_{L+1} = \varphi_1$ および $\varphi_0 = \varphi_L$ とする。

1. シュレディンガー方程式 (1) の解が

$$\varphi_x^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \tag{2}$$

と書けることを確かめ、対応する固有エネルギーを求めよ。ただし、

$$k \in \mathcal{K}' := \left\{ \frac{2\pi n}{L} \,\middle|\, n = 1, \ldots, L \right\} \tag{3}$$

である。

2. 上の状態が正規直交関係

$$\langle\varphi^{(k)}|\varphi^{(k')}\rangle := \sum_{x=1}^{L} (\varphi_x^{(k)})^* \, \varphi_x^{(k')} = \delta_{k,k'} \tag{4}$$

を満たすことを示せ。

3. 同じ周期境界条件で、2 粒子の場合のシュレディンガー方程式を書け。講義と同様、$k < k'$ について、

$$|\varphi^{(k,k')}\rangle = \sum_{\substack{x_1, x_2 = 1, \ldots, L \\ (0 \le x_1 < x_2 \le L)}} \varphi_{x_1,x_2}^{(k,k')} |\psi_{x_1,x_2}\rangle \tag{5}$$

$$\varphi_{x_1,x_2}^{(k,k')} = \varphi_{x_1}^{(k)} \varphi_{x_2}^{(k')} - \varphi_{x_1}^{(k')} \varphi_{x_2}^{(k)} \tag{6}$$

とすれば解が得られるような気がするのだが、実は、これではうまくいかない。そのことを確かめよ（もちろん、周期境界にしたことが理由でダメになる）。

4. では、どうすれば解が得られるか、考えよ。これは難しいので（見たくない人は見ないでいいように）脚注[*1]にヒントを書く（ヒントを見ても十分に難しいと思う)。

5. 3 粒子の系の場合はどうか？

6. 一般に N 粒子の系の場合はどうか？

[*1] 実は対応する 1 粒子問題として (1) を考えてもうまくいかない。そのかわりに、L と 1 の間の跳び移りの u の符号だけを反転した問題を考えて、その解を利用すると、うまくいく。