中 間 試 験 問 題	試験日	2019 年 6 月 12 日	解答用紙	2 枚
原 子 物 理 学 概 論	担 当	荒川　一郎	計算用紙	0 枚

・関数電卓の持ち込み可です．携帯電話・スマホは不可です．
・いずれも導く過程がわかるような説明を記すこと．答えだけでは満点になりません．
・Boltzmann 定数：$k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

問　　　題

1. 気体分子の速さ分布を表す Maxwell-Boltzmann の速さ分布関数は，

$$f(v)dv = 4\pi\alpha v^2 \exp\left(-\beta v^2\right) dv, \qquad \alpha = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \beta = \frac{m}{2kT}$$

である．ここで，v は気体分子の速さ（速度の絶対値），m は気体分子の質量，T は気体の温度である．気体分子は球形でその直径を D とする．また気体は理想気体の状態方程式 $p = nkT$（p は圧力 [Pa]，n は気体分子数密度 [m^{-3}]）に従うものとする．

(a) 最大確率速さ v_M（ $f(v)$ が極大値をとる v ），算術平均速さ $\langle v\rangle$，二乗平均速さ $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ を導け．答えはそれぞれ m, T と定数で表せ．

(b) 気体圧力が p の時の平均自由行程 λ を導け．答えは T, p, D と定数で表せ．すべての分子が運動していることを考慮したときの補正係数は結果だけを用いて良い．

(c) 気体圧力が p の時の単位面積への気体分子の入射頻度 Γ [$\mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{m}^{-2}$] を，$m, T, p$ と定数で表せ．

(d) 面に入射する気体分子の平均運動エネルギーは $2kT$ であることを導け．

Hint：
$$\int_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2)dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1}\exp(-ax^2)dx = \frac{n!}{2}\frac{1}{a^{n+1}} \quad , \qquad \Gamma = \frac{n}{4}\int_0^\infty v f(v) dv$$

2. 酸素気体（O_2，モル質量 $M = 32$ g/mol，分子直径 $D = 0.37$ nm の球形とする）について以下の問に答えよ．前問の結果を利用して良い．

(a) 気体の温度 $T = 300$ K，圧力 $p = 1 \times 10^{-4}$ Pa の時の分子の平均自由行程 λ を求めよ．

(b) 気体の温度 $T = 300$ K，圧力 $p = 1 \times 10^{-4}$ Pa の時の分子の入射頻度 Γ を求めよ．

(c) 気体の温度が $T = 75$ K と $T = 300$ K の時のそれぞれの速さ分布を 1 枚のグラフ上に描け．横軸に v ，縦軸に $f(v)$ ，各軸の目盛りと単位を忘れないこと．細かいところまで精確である必要はないが，特徴がわかるように書くこと．言葉で補っても良い．