誘因整合性の条件

神戸　伸輔* **

2011 年 9 月

Abstract

神戸伸輔著「入門・ゲーム理論と情報の経済学」（日本評論社）の第 14 章において扱っているインセンティブ契約について、誘因整合性がどの領域になるかを説明する。教科書の図 14-2 では凹関数の下側の領域が誘因整合性を満たすように描かれているが、効用関数の形状によっては、この領域の境界が凸関数で表される場合もあることを示す。

1.　誘因整合性の成立する領域の境界を表す式の導出

教科書の 14 章 3 節で扱っているモデルを考える。つまり、効用関数を $u(x)$ で表し、成功したときの報酬を v、失敗したときの報酬を w、努力するときのコストを e、努力しないときのコストを f で表す。そして、努力したときに成功する確率は p で、努力しない時に成功する確率は q で表す（$q < p < 1$）。なお、以下では、$u'(x) > 0$ と $u''(x) < 0$ を仮定する。191 ページで導出されたように、誘因整合性の条件は、$pu(v)+(1-p)u(w)-e \geq qu(v)+(1-q)u(w)-f$ と与えられる。誘因整合性の成立する領域の境界はこの不等式が等式で成り立つ部分である。（以下ではその等式を境界の式と呼び表す。）境界の式を整理しなおし、$A \equiv (e-f)/p-q)(> 0)$ と定義すると、以下のように書ける。

$$u(v) - u(w) = \frac{e-f}{p-q} = A.$$

$A > 0$ で効用関数は増加関数だから、$v > w$ であることが分かる。ここで、$v^* = u^{-1}(A+u(0))$ と定義すると、$u(v^*) - u(0) = A$ が成り立つ。つまり、v^* は x 軸と交わる x 切片の値を示す。なお、$u(x)$ は増加関数であるから、定義より $v^* > 0$ が成り立つ。ここから、境界は x 軸と正の領域で交わることが分かる。

境界の式の形状を求めよう。

まず傾きを求める。境界の式を v について微分して $u'(v) - u'(w)\frac{dw}{dv} = 0$ となる。つまり、

$$u'(w)\frac{dw}{dv} = u'(v) \tag{1}$$

* email: shinsuke.kambe@gakushuin.ac.jp

** 誘因整合性の条件を表す領域が必ずしも教科書の図と同じにならないことは、関西学院大学商学部の水野敬三先生がして指摘してくださいました。ここに感謝の意を表します。

が成り立つ。効用関数は増加関数であるから、この式から傾きが正であることが分かる。

次に、凹関数か凸関数かを傾きの微分を計算することで調べる。(1) 式を v について微分すると、

$$u'(w)\frac{d^2w}{dv^2}+u''(w)\left(\frac{dw}{dv}\right)^2=u''(v)$$

となる。ここで (1) 式から $\frac{dw}{dv}$ を計算して代入すると、

$$u'(w)\frac{d^2w}{dv^2}+u''(w)\left(\frac{u'(v)}{u'(w)}\right)^2=u''(v)$$

を得る。これを $\frac{d^2w}{dv^2}$ について解いて、

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dv^2}&=\frac{1}{u'(w)}\left\{u''(v)-u''(w)\left(\frac{u'(v)}{u'(w)}\right)^2\right\}\\&=\frac{u''(w)}{u'(w)}\left\{\frac{u''(v)}{u''(w)}-\left(\frac{u'(v)}{u'(w)}\right)^2\right\}\end{aligned}\tag{2}$$

となる。

2. 具体的な効用関数と境界の形状

この章では前章の (2) 式を具体的な効用関数で評価する。関数形によって、(2) 式は正になったり負になったりすることを示す。これは、境界が凸関数の時も凹関数の時もあることを示す。

2.1. 線形の効用関数

凹関数の極限として線形の場合を考える。つまり、$u(x)=x$ の場合である。このとき、境界の式は $v-w=A$ となり直線になる。このことは、(2) 式を導出する直前の式から $\frac{d^2w}{dv^2}=0$ を示すことができることからも確かめられる。

2.2. 指数関数の効用関数

効用関数として、$u(x)=-e^{-x}$ を考える。$u'(x)=e^{-x}$ で $u''(x)=-e^{-x}$ となる。ここで、$v>w$ から、$e^{-v}<e^{-w}$ となることを使うと、

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dv^2}&=\frac{-e^{-w}}{e^{-w}}\left\{\frac{-e^{-v}}{-e^{-w}}-\left(\frac{e^{-v}}{e^{-w}}\right)^2\right\}\\&=-\frac{e^{-v}}{e^{-w}}\left(1-\frac{e^{-v}}{e^{-w}}\right)<0\end{aligned}$$

と結論付けられる。これは、境界の式は凹関数になることを意味する。この状況が教科書の図 14-2 と図 14-4 の状況と対応する。

2.3. $\sqrt{}$ 型の効用関数

効用関数がべき関数の形の時、特に $u(x)=\sqrt{x}$ となる場合についてみてみよう。$u'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ で $u''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ となる。ここで、$v>w$ に注意すると、(2) 式より、

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dv^2} &= \frac{u''(w)}{u'(w)}\left\{\frac{u''(v)}{u''(w)}-\left(\frac{u'(v)}{u'(w)}\right)^2\right\} \\
&= \frac{-2w^{-\frac{3}{2}}}{4w^{-\frac{1}{2}}}\left\{\frac{v^{-\frac{3}{2}}}{w^{-\frac{3}{2}}}-\left(\frac{v^{-\frac{1}{2}}}{w^{-\frac{1}{2}}}\right)^2\right\} \\
&= -\frac{1}{2w}\left\{\frac{w^{\frac{3}{2}}}{v^{\frac{3}{2}}}-\frac{w}{v}\right\} \\
&= -\frac{1}{2w}\frac{w}{v}\left\{\frac{w^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}}-1\right\}>0
\end{aligned}$$

となる（$v>w$ から、$\frac{w^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}}<1$ となり、大きなカッコ内は負になる。)。つまり、このとき、境界の式は凸関数になる。この状況では境界の形状は教科書の図 14-2（あるいは図 14-4）と異なることになる。以下の別バージョンの図を参照。

別バージョン (u(x)=√x の時)

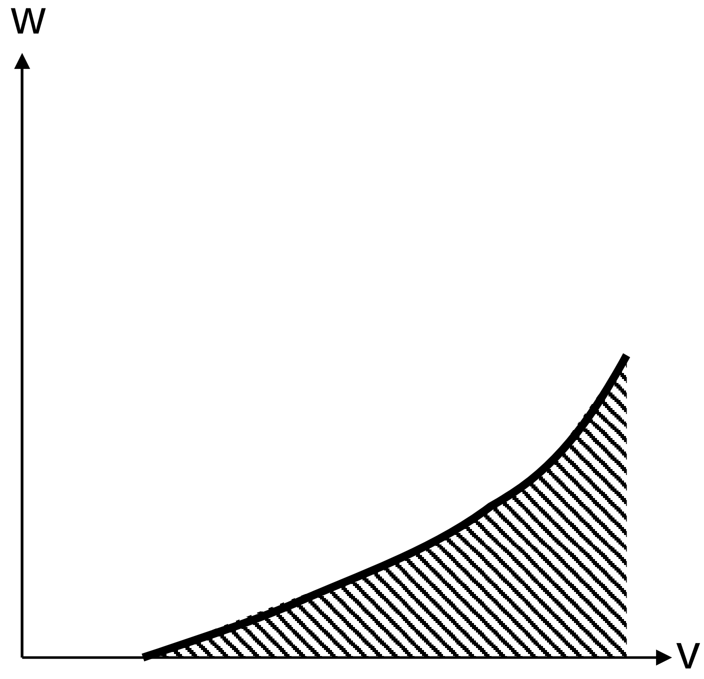

図14-2　誘因整合性 (別バージョン)

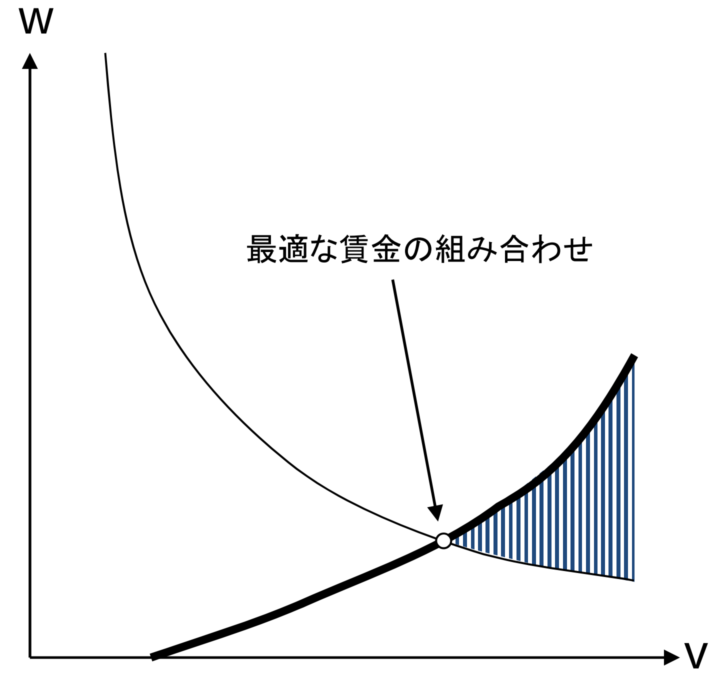

図14-4　最適な契約(別バージョン)