経営のための仮説検定

2024年2月22日

学習院大学経済学部経営学科　教授

白田　由香利

コロッケの重量平均値に違いはあるのか（統計的仮説検定）

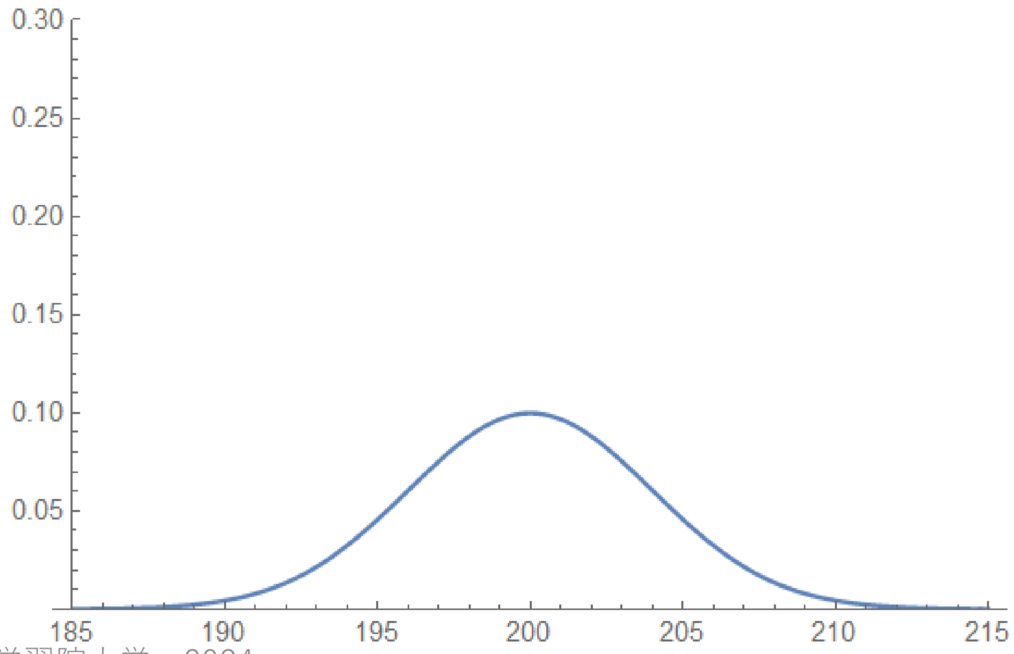
最近，円安で牛肉の量減っていませんか？

仮説検定

- お肉屋さんのビーフコロッケが200ｇと言って売っている（説）。
  どうも少ない気がしてならない(仮説からのずれ)
- 30個買ってきて（標本），平均値（標本平均値）を調べてみよう
- 仮説をたてて検証する.
- 帰無仮説：コロッケの母集団の平均は200ｇである
  $\mu = 200$
- 対立仮説：コロッケの母集団の平均は200ｇより少ない
  $\mu < 200$
- 標本に基づいて仮説を検証する。
- 標本平均値が、帰無仮説から大幅にずれていたら、
  帰無仮説は棄却される。対立仮設が成立する.
- 標本平均値が，200ｇよりも少し小さいだけであれば，帰無仮説は棄却されない.

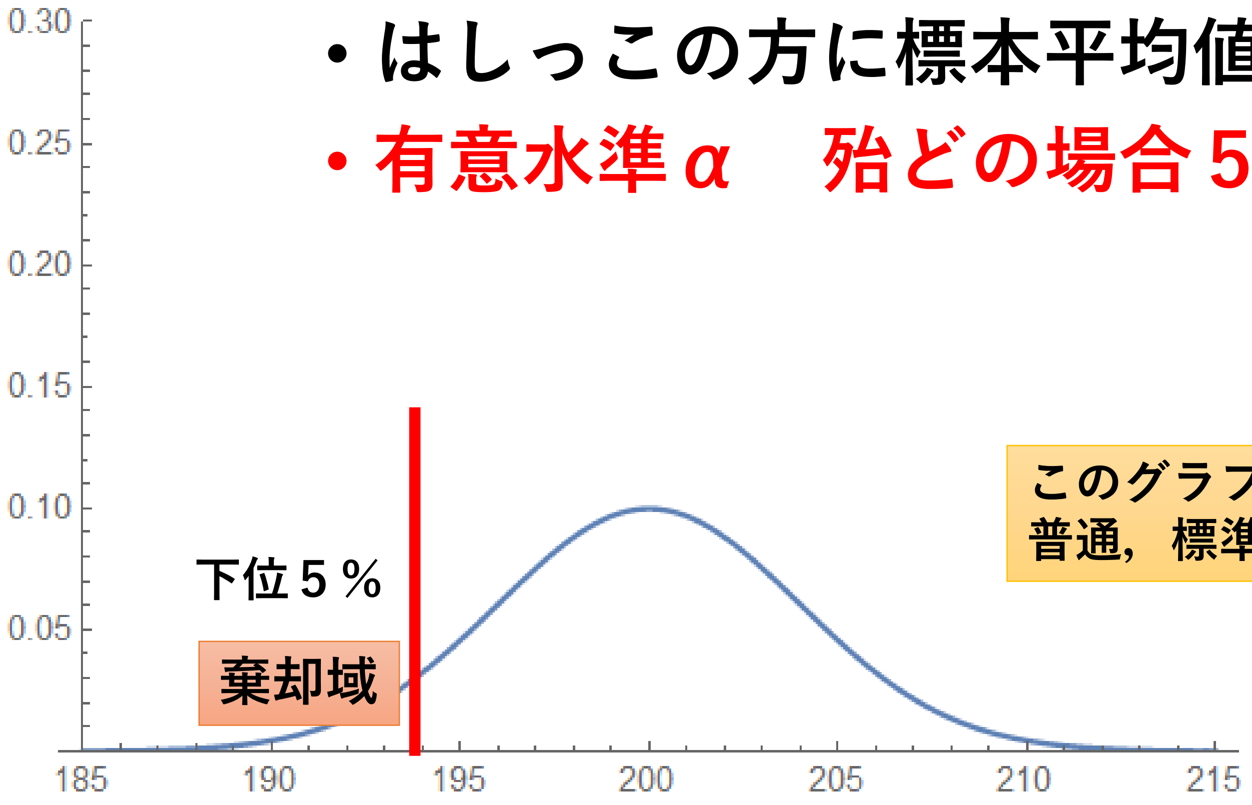
コロッケの母集団の平均は200ｇである この母集団とは？

- このお店が平均200ｇで作り続けた場合の，膨大な数のコロッケ集団のことを仮想的に考える．
- 200ｇで作っているつもりなのだが，多少の増減はある．
- このような確率密度分布になる



仮説検定の有意水準

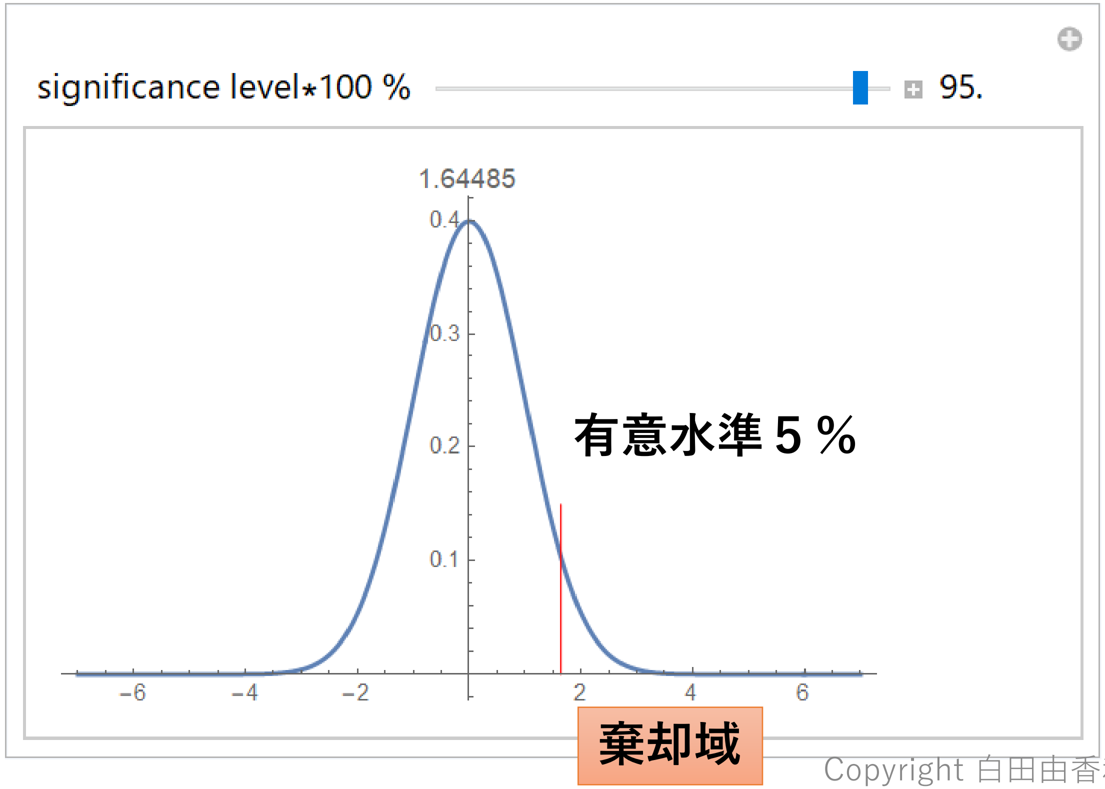
- どの位，母平均200ｇから小さければ，帰無仮説棄却，となるのか？
- はしっこの方に標本平均値が落ちれば，帰無仮説棄却
- **有意水準α　殆どの場合５％か１％に設定**

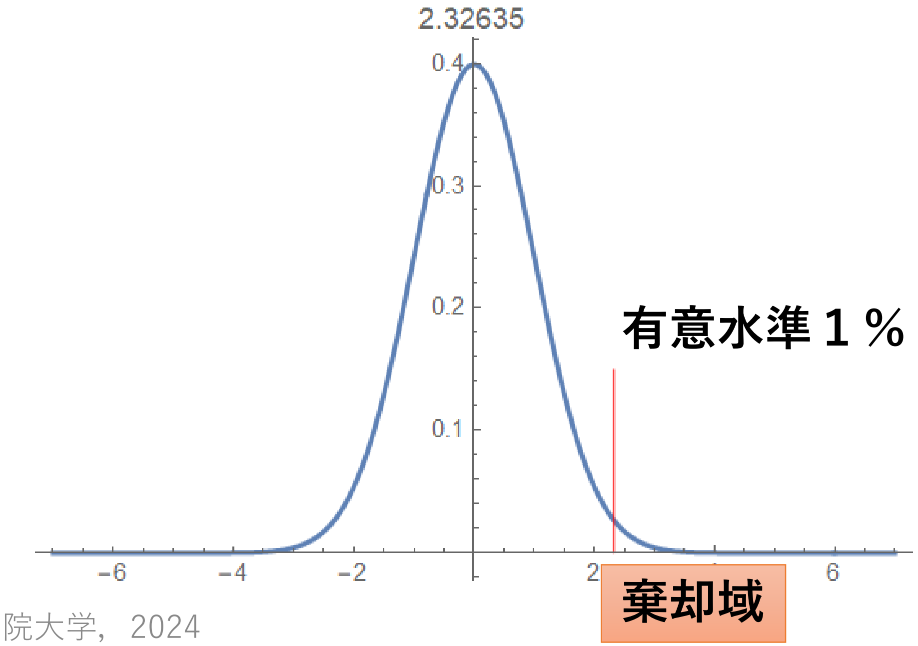


このグラフでは重さをそのままｘ軸にしているが，普通，標準化した値を使って仮説検定する

仮説検定：片側検定の別の例

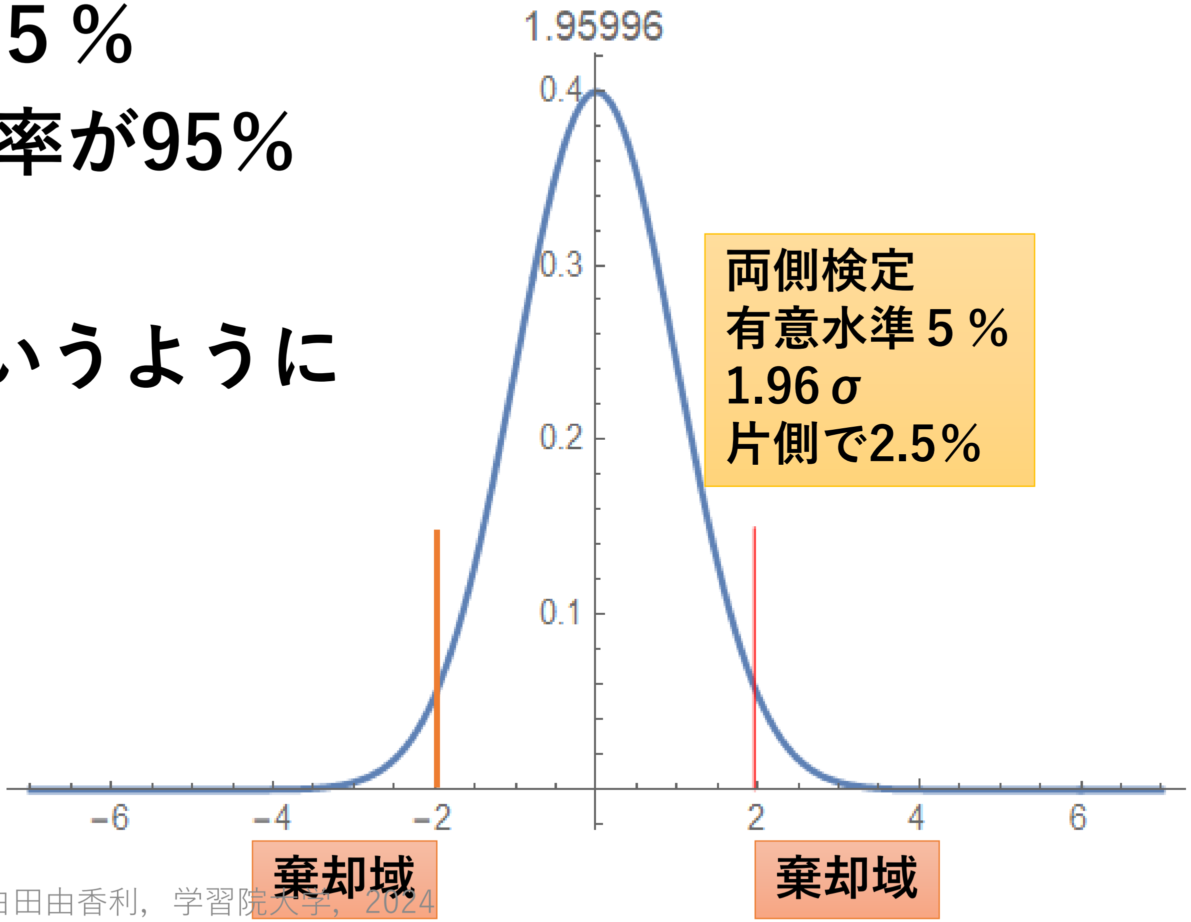
- 歯車の直径が100mmであるはずなのに，なんだか大き目で穴に入らない．困った．
- 帰無仮説：歯車の直径の母平均は100mmである．
- 対立仮設：歯車の直径の母平均は100mmより大きい． $\mu > 100$
- 全体の５％の端か、１％の端か？　有意水準 α





仮説検定：両側検定
真中あたりにあるのか、否か

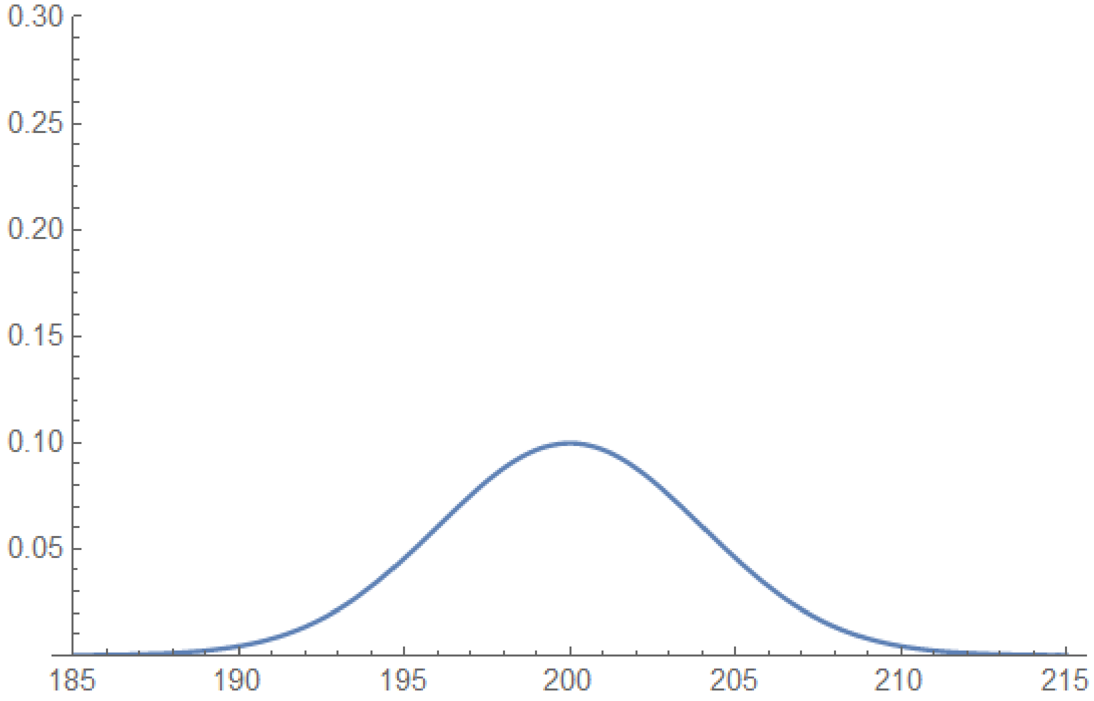
- 50ｇの袋詰めの場合，多くても少なくても困る→両側検定
- 右端と左端の棄却域合計が５％
- ということは，真ん中の確率が95%
- 1.96σ
- 対立仮説は　$\mu \neq 200$　というように立てる
（非常に小さい場合と非常に大きい場合、帰無仮説棄却となる）



正規母集団に対する仮説検定の例
コロッケは200ｇあるのか？
少ないと疑うので，片側検定

コロッケ1個の重さの確率分布

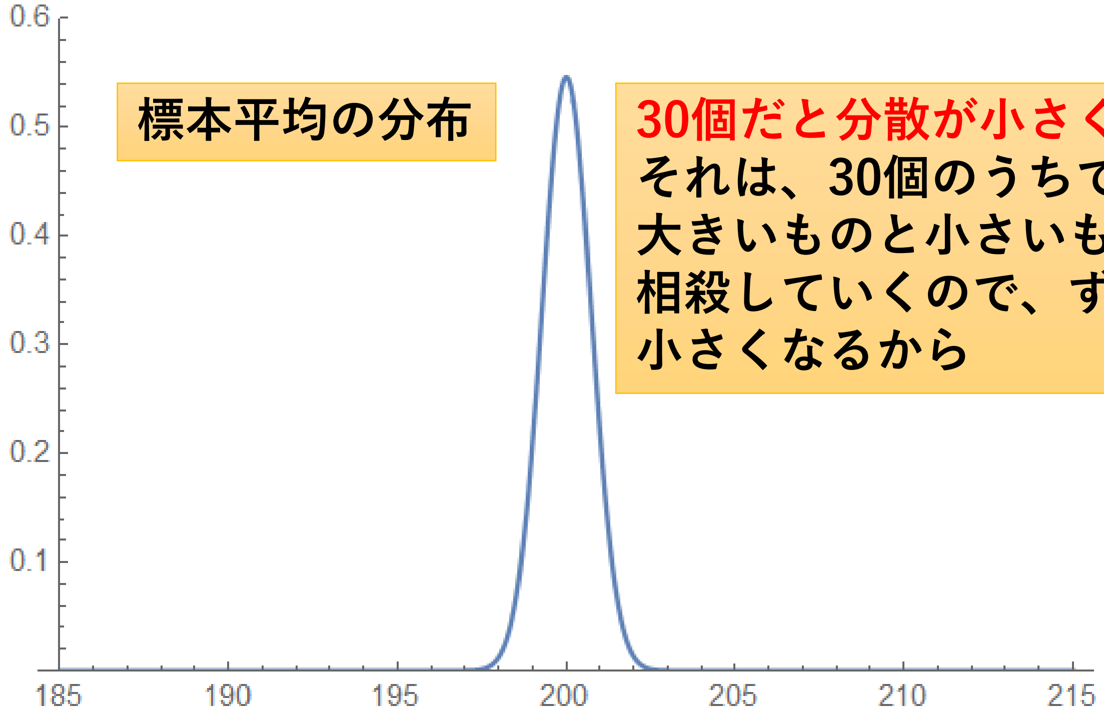
N(200, 16)



30個の標本の重さを測る

標本平均の確率分布は中心極限定理より

N(200, $\frac{16}{30}$)　分散は1個の分散値をn=30で割り算する



30個だと分散が小さくなる
それは、30個のうちで
大きいものと小さいものが
相殺していくので、ずれは
小さくなるから

正規母集団に対する仮説検定の例
コロッケは200ｇあるのか？
片側検定　有意水準５％で検定せよ

標本のデータが以下のように与えられた！

{195,193,189,201,190,195,193,189,201,190,195,193,189,201,190,195,193,189,201,190,195,193,189,201,190,195,193,189,201,190}　<=　測定値

標本平均は**193.6**

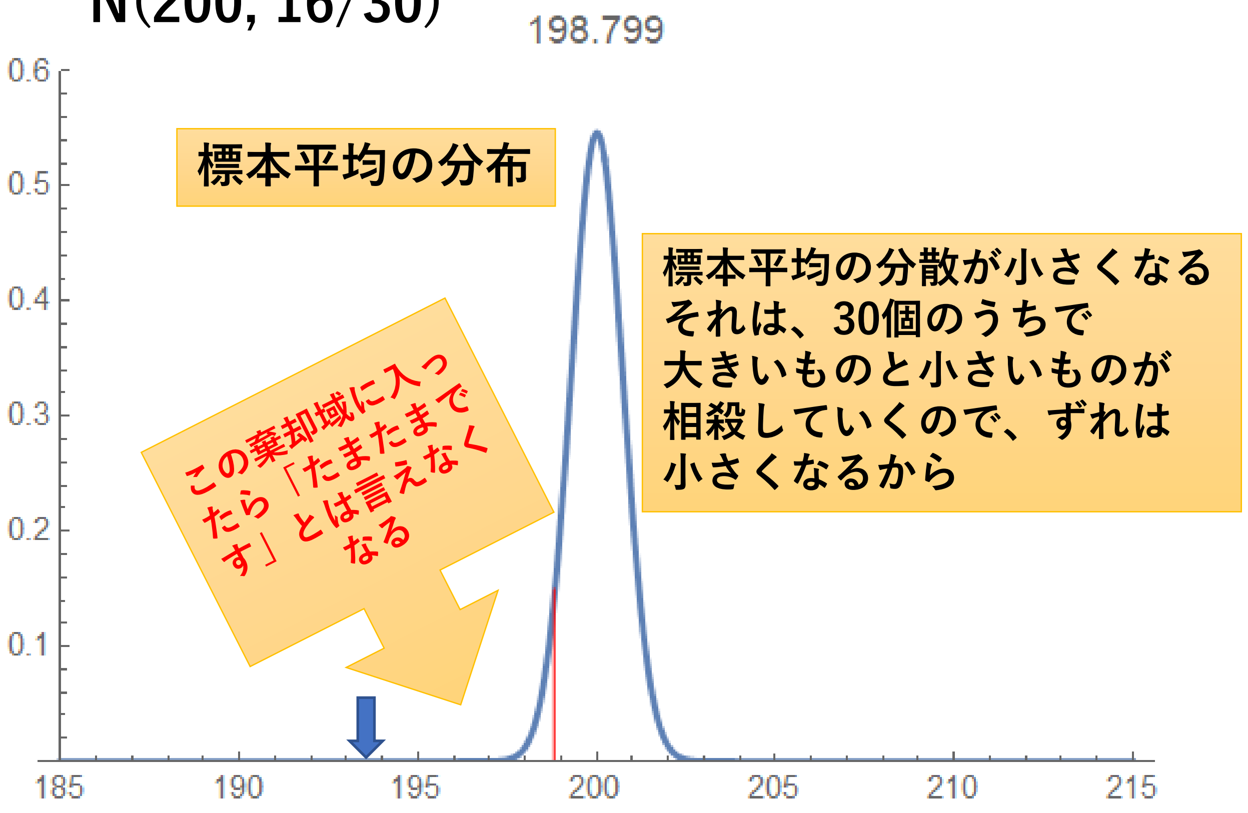
この標本平均は棄却域にはいったか？

棄却域に入っている→
帰無仮説棄却

30個の標本の重さを測る

標本平均の確率分布は中心極限定理より

N(200, 16/30)



でも、境界の値はどうやって計算するのだろう？？？？

正規母集団に対する仮説検定の例
コロッケは200ｇあるのか？

標準化した正規分布で考える

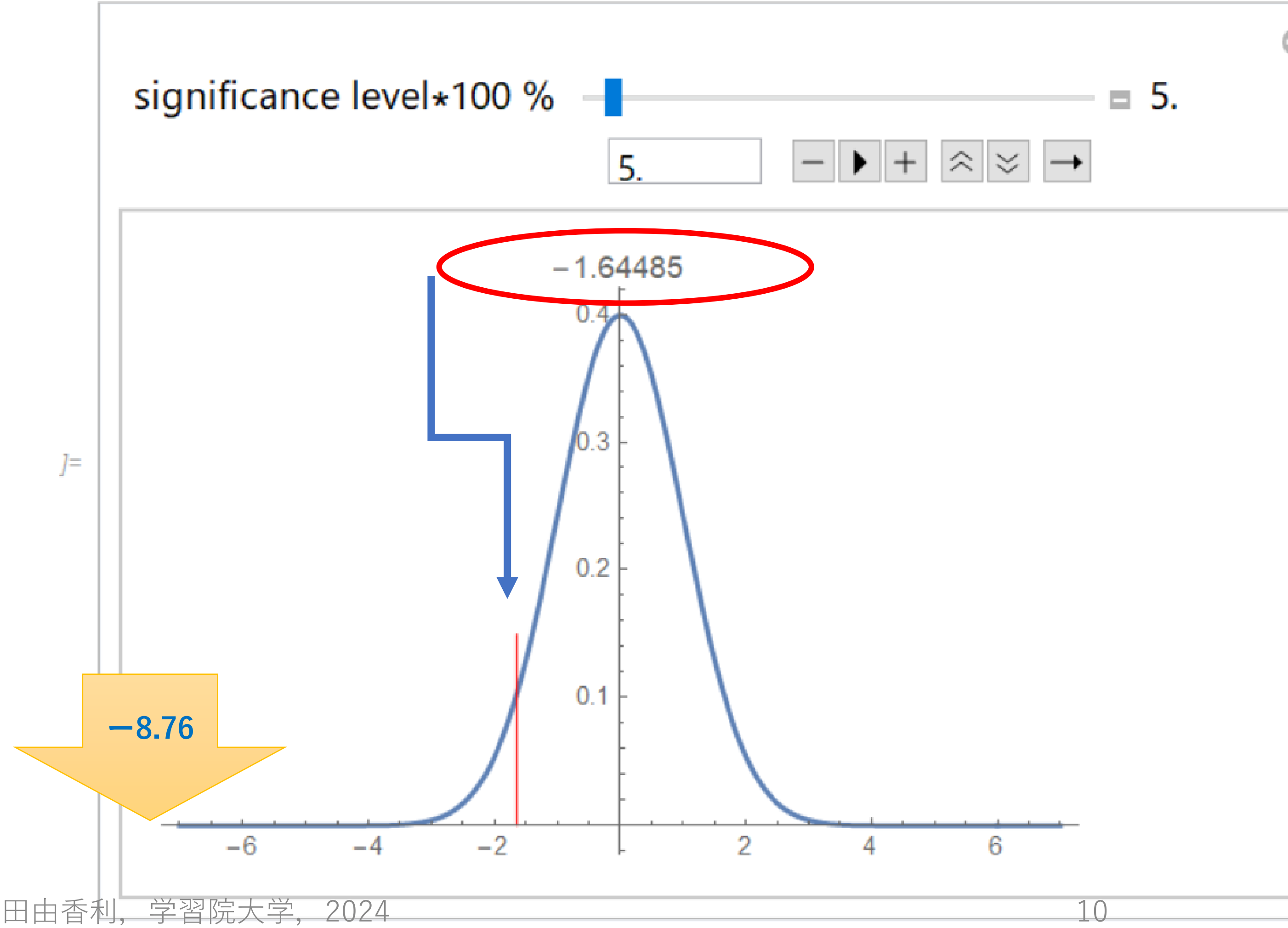
- 193.6(標本平均）は、理論上の平均値200から、何標準偏差分ずれていますか？と考えていく。
- 理論的に、正規分布で下５％は σ 1.64個分ということが既に分かっている
- 標準化 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{(\frac{\sigma^2}{n})}} = \dfrac{193.6-200}{\sqrt{(\frac{16}{30})}}$

(193.6-200)/(16/30)^0.5

＝ -8.76356 ＜ -1.64

帰無仮説棄却領域なので、

帰無仮説棄却



正規母集団の分散（母分散）σが不明のときは　t －分布

- 母分散を標本分散（不偏分散） s^2 で代用する

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{X})^2$$

- 正規分布ではなく、<u>スチューデントのt分布</u>を使う。
- https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/VDStat/

- $\mathrm{t} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{(\frac{s^2}{n})}}$

母分散σが分かって
いるときはこの式
だった．そのσを
の代わりにｓを使う

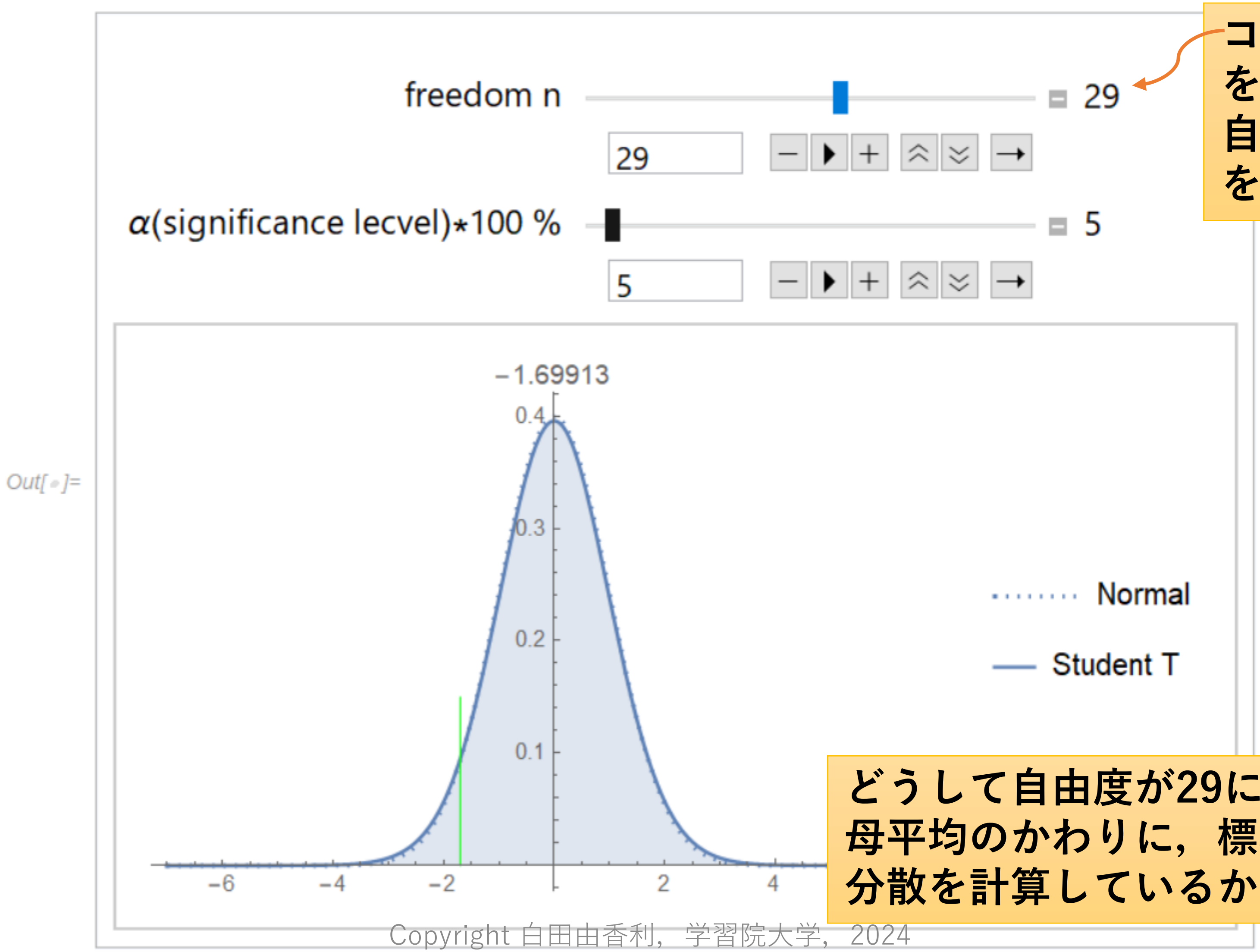
$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{(\frac{\sigma^2}{n})}}$$

中心極限定理より
標本平均の分布の
分散は小さくなる．

スチューデントのt分布

https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/VDStat/

•



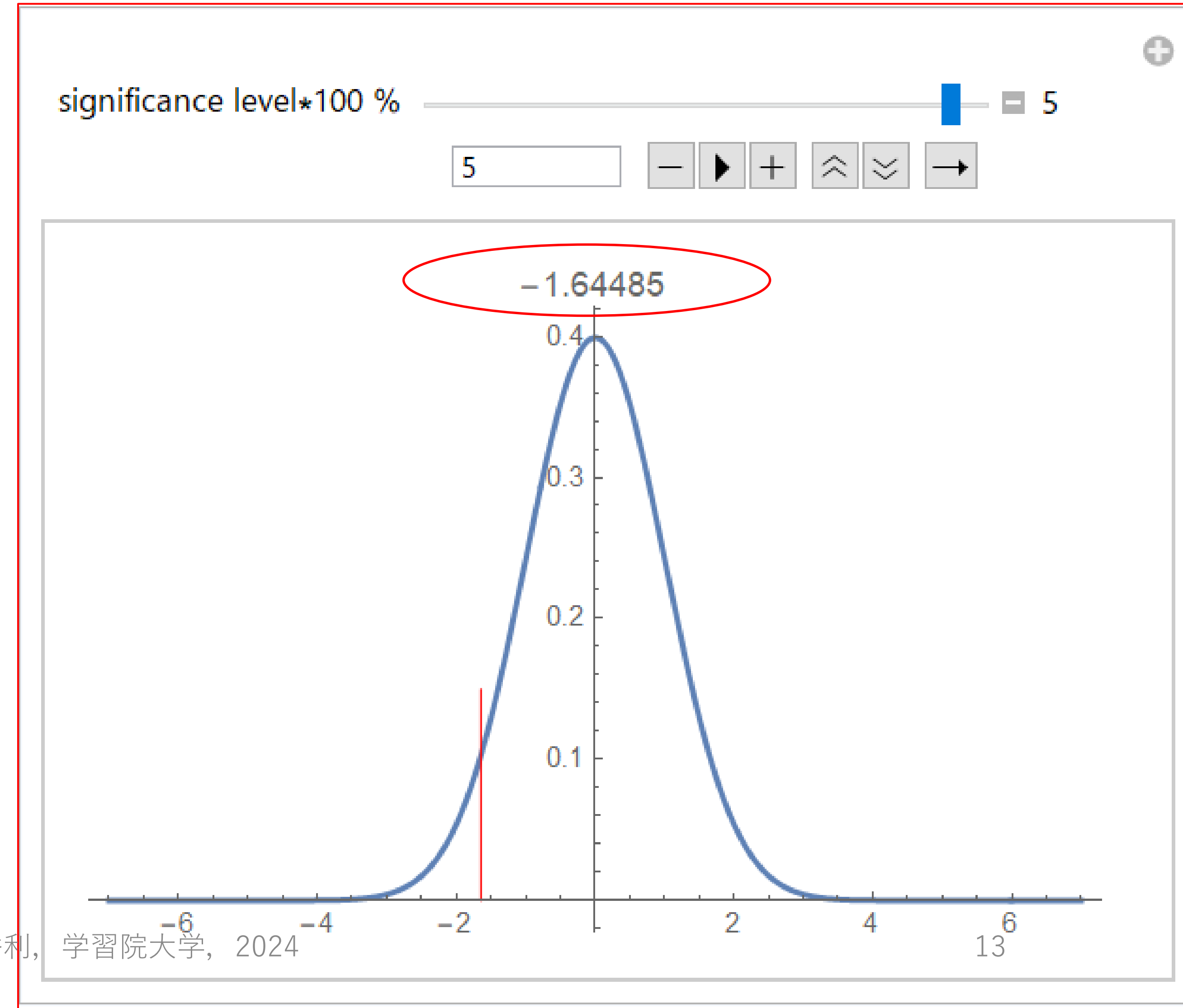
コロッケ30の平均を使うならば，自由度29の t分布を用いる

どうして自由度が29になるのか？
母平均のかわりに，標本平均を使って
分散を計算しているから自由度が１減っている

課題＃11

解答は小数点以下２桁まで書くこと.
途中の計算では，小数点以下４桁程度まで長くとって計算せよ

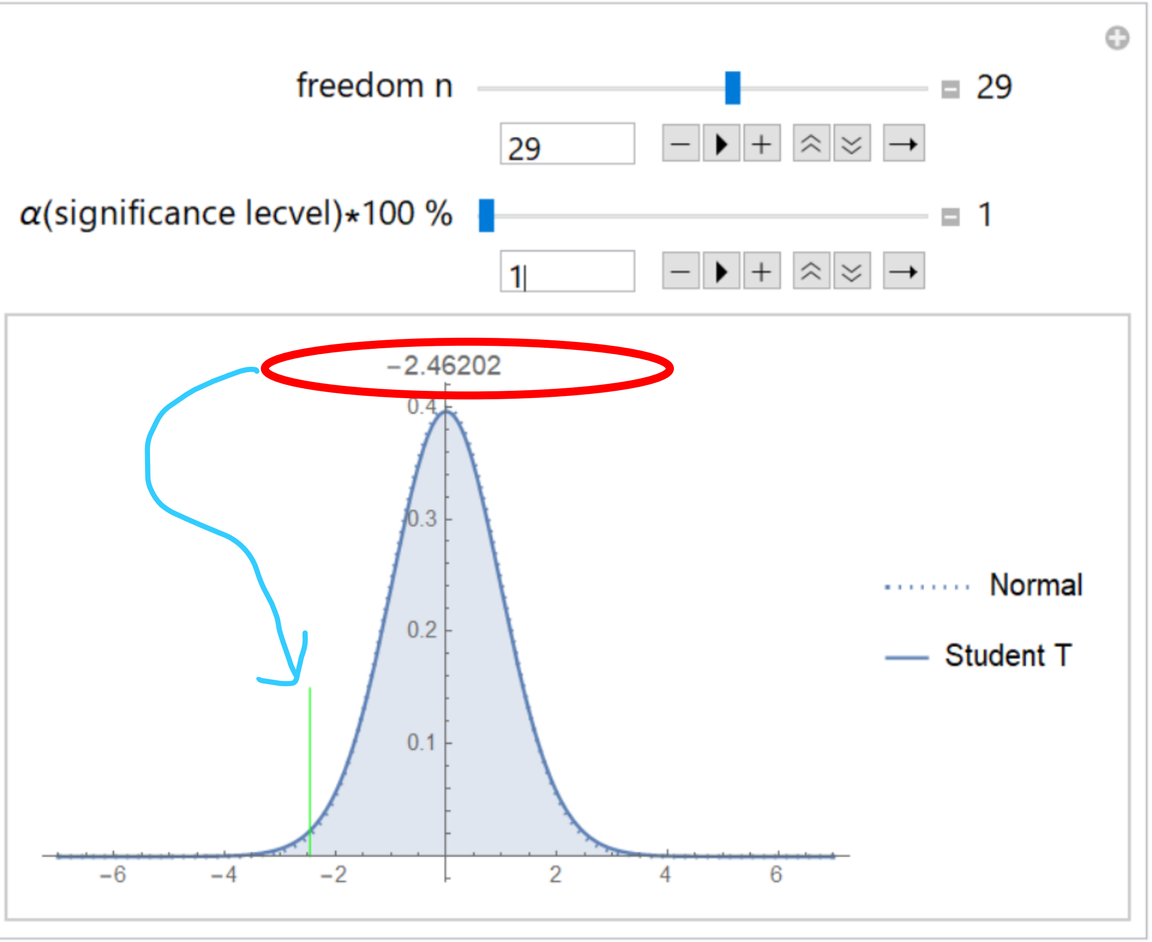
- 250ｇであるというハンバーグがあります。この重さ1個の母分散は100。
  N(250, 100)
- 標本(30個）の標本平均は 249.2gだった
- 母平均は250ｇであることを，有意水準5％の片側検定でテストせよ.
- まず、標本平均値を求めてください。
- 次にその標準化した値を計算する。
- 検定には標準化された正規分布を使う（右図）
  下から5％の境界値は-1.64485
- 帰無仮説：$\mu=250$
  対立仮説：$\mu<250$
  有意水準５％で仮説検定せよ。
  結論は以下のどちらか？
  理由とともに自分で書き写すこと.
  1. 帰無仮説は棄却されたので，母平均の重さは250gより小さいと言える
  2. 帰無仮説は棄却されなかったので，母平均の重さが250ｇであることは否定できない。



課題＃１２

解答は小数点以下２桁まで書くこと．
途中の計算では，小数点以下４桁程度まで長くとって計算せよ

- 250ｇであるというハンバーグがあります。この重さ1個の母分散は不明です。　N(250, ?)
- 標本(30個）を取って測定した結果は
  242: 5個、239: 5個、240：5個、250：6個、241：4個、238：5個　でした。
- 母平均は250ｇであることを，有意水準１％の片側検定で検定せよ.
- まず、標本平均と**標本分散**s^2を求めてください。
- 次に標本平均値の標準化した値を計算せよ.
- 検定には標準化された自由度29のｔ分布を使う（右図）
  下から1％の境界値は-2.46202
- 帰無仮説：μ ＝250、
  対立仮説：μ ＜250
  有意水準５％で仮説検定せよ。
  結論は以下のどちらか？
  理由とともに自分で書き写すこと.
  1. 帰無仮説棄却されたので、母平均の重さは250gより小さいと言える
  2. 帰無仮説は棄却されなかったので、母平均の重さが250ｇであることは否定できない。



男女で味の好みに違いがあるか？

χ^2検定

独立性の検定

分散のようすが男性と女性で同じかどうか

χ^2検定　独立性の検定

ジェンダー独立
⇒男女に関係ない
男女で同じ，という意味

- マーケティングで、女性と男性で好みに違いがあるか否か、県による味の好みの違いがあるか否か、などに用いることができる。
  - 帰無仮説：男女で違いはない（独立である）
  - 対立仮説：男女で違いがある（独立ではない）
- コロナの致死率で、女性と男性で違いがあるか否か、県による違いがあるか否か、などに用いることができる。
- 企画などを通すときにも、「数字を見ている何となく違いがあるようだ」では意見が通らない。仮説検定の結果を見せる必要がある。
- χ^2検定　は母分散についての検定に使われるが、ばらつきについて検定する基準として近似的に使われる。

カップラーメンの味の好みの独立性検定

- シロクマ食品は新商品として、キャラメル味のカップ麺を開発しました。解答は、美味しい、まずい、無回答の３種類です。
- 男女のそれぞれの回答数を分割表にしました。
- 男女で味の好みの違いがあるか、有意水準５％で検定せよ。

	In Favor(F)	Against（A）	No Opinion　　（N）	
Men	60	70	12	142
Female	15	32	6	53
	75	102	18	195

男女の差がない（ジェンダーに独立）の場合、どうなるか→理論値を計算

- 男女差がないとしたら、
  回答「美味しい」の確率は
  75÷195

	In Favor(F)	Against（A）	No Opinion　（N）	
Men	60	70	12	142
Female	15	32	6	53
	75	102	18	195
	男性の確率	0.73		
	女性の確率	0.27		
	genderに独立の場合それどれの意見の確率は			
	0.38	0.52	0.09	1

- 男女差がない場合
- 男性で「美味しい」と回答する人の数の理論値は
  142×(75÷195)＝54.615[人]

問題：理論度数が以下の黄色になることを確かめよ。

- Expected　理論によって予測された、という意味
  ジェンダー独立であれば，予測値は？

	In Favor(F)	Against（A)	No Opinion　（N)	
Men	60	70	12	142
Expected	54.62	74.28	13.11	
Female	15	32	6	53
Expected	20.38	27.72	4.89	
	75	102	18	195

独立性の検定
O: Observed（観測値）
E: Expected（予測値）

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

予測値からどの程度ずれているかを表す
この統計値χ^2が大きい場合，男女で差がないとは
言えなくなる

問題： $\frac{(O-E)^2}{E}$ を自分で計算してたす

- 6個の値を足し算

- 6個の値を足し算

	(O-E)^2 / E	(O-E)^2 / E	(O-E)^2 / E			
	In Favor(F)	Against（A）	No Opinion　（N）			
men	0.531	0.246	0.094			
women	1.422	0.660	0.251			
	1.953	0.906	0.344			3.204

予測値からどの程度ずれているかを表す

自由度は（２－１）×（３－１）＝２

ジェンダー独立の独立性の検定

帰無仮説：男女で違いはない（独立である）
対立仮説：男女で違いがある（独立ではない）

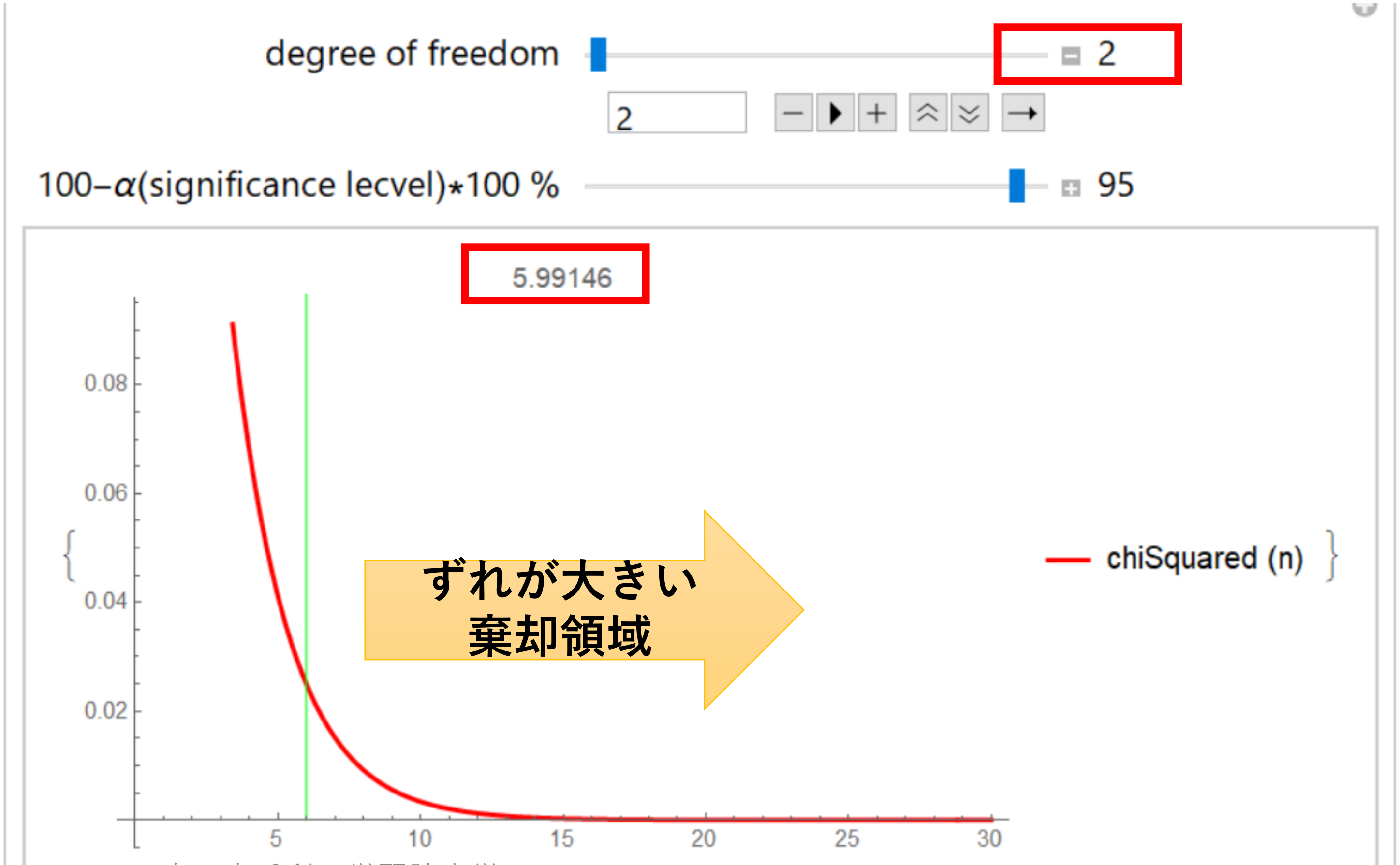
- χ^2値は　χ^2分布に従うことが分かっているので

χ^2分布を使って，検定する

分布は何を使うか？ χ^2　chi-squared

- 自由度は（２－１）×（３－１）＝２
- https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/VDStat/
- 有意水準５％で検定

- 棄却領域との境界値は、5.99
- χ^2　3.2という値は棄却領域に入らない。
- よって、帰無仮説は棄却されない。
- 男女で違いはない、ということは否定されない
- 積極的に証明されたわけではないことに注意。



課題＃13　回復確率が5都道府県で等しいか否か、有意水準５％で検定せよ。XXXの値を計算して、その値と結論を記載せよ。

都道府県名		回復者数	死亡者数	県別合計	(O-E)^2/E	
A	観測値	34813	477	35290		
	期待値	34710	580		XXX	18.31247
B	観測値	15035	270	15305		
	期待値	15053	252		0.022565	1.350215
C	観測値	10404	192	10596		
	期待値	10422	174		0.030513	1.825822
D	観測値	7479	105	7584		
	期待値	7459	125		0.051811	3.100251
D	観測値	5032	172	5204		
	期待値	5118	86		1.46051	87.39399
		72763	1216	73979		
						113.8542

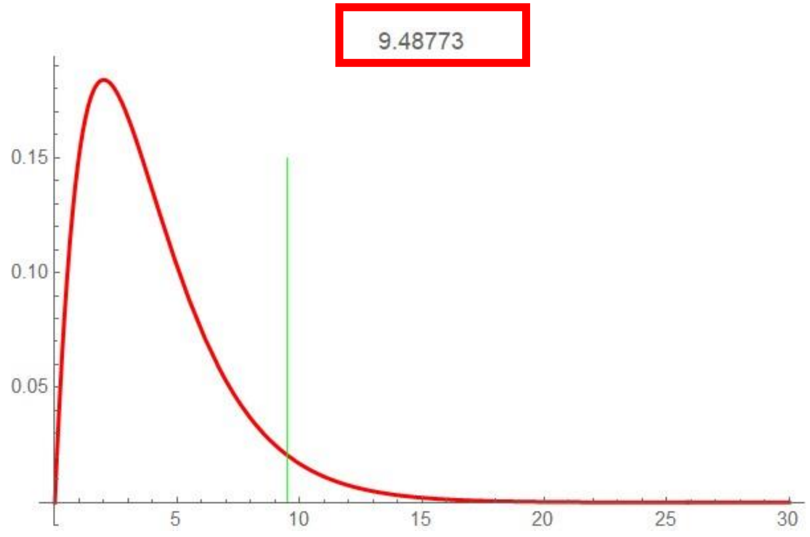
回復確率	死亡確率
0.983563	0.016437

帰無仮説：　感染者のうち，回復する（死亡する）比率は5都道府県で等しい

対立仮説：　感染者のうち，回復する（死亡する）比率は5都道府県で等しくない

XXX:小数点以下３桁で答えよ.

自由度４の χ 二乗分布：５％の限界値は9.49



引用：Google 統計情報　COVID-19, 2020年11月28日参照.

課題＃14

- GOOGLE COVID統計(2022/4/28参照）の値を使い，感染者の回復する確率に関する，東京大阪神奈川の独立性を有意水準５％で検定せよ．
感染か死亡かしか選択肢はないと仮定せよ．
- WORDでA4　1枚でPDFで提出．

Google　COVID 統計

合計　日本

感染者数	死亡者数
768万	29,344

地域	感染者数↓	死亡者数
東京都	**142万**	**4,310**
大阪府	88.1万	4,906
神奈川県	69万	2,123
埼玉県	50.2万	1,430
愛知県	47.4万	2,011