2024年前期
経営数学1
需要予測のための数学
ー円安なのでハンバーガーを小さくしますー

2024年2月25日

学習院大学経済学部経営学科　教授

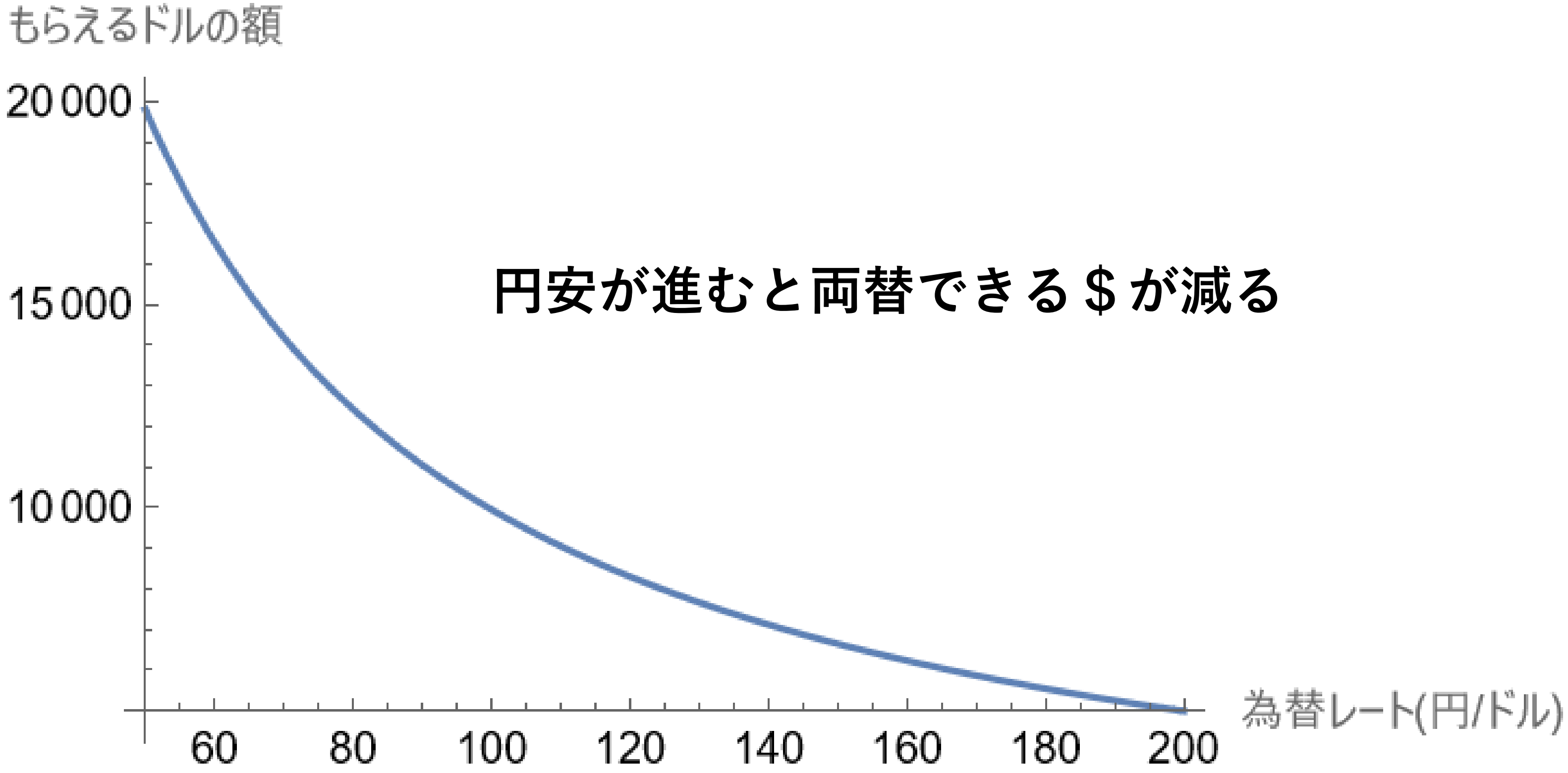
白田　由香利

円安なのでそのまま価格を上げたら売れなくなった

円安→材料費高騰→価格に反映→需要激減

円安でコストはどれだけ上昇か

- 100万円で何ドル両替できるか？
- 為替レート　x
- 手数料 例0.5円
- $\frac{1000000}{x+0.5}$

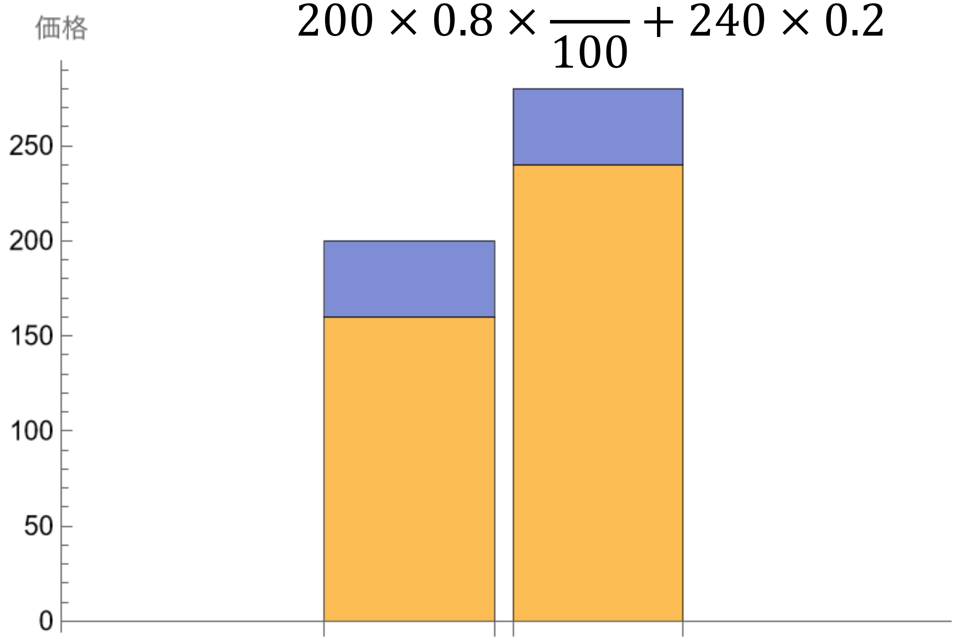


ハンバーガーSHOP
小麦と肉を輸入している

問題の簡単化

- 本日の為替レートで小麦と肉を買うとする
- 米国ではインフレはないと仮定
- 材料費200円のうち，小麦と肉が８０％しめていたとする
- レートが100円/＄から150円/$ に変動した場合
  材料費はいくらか増加するか？
- ANS. 200円 ⇒ 280円

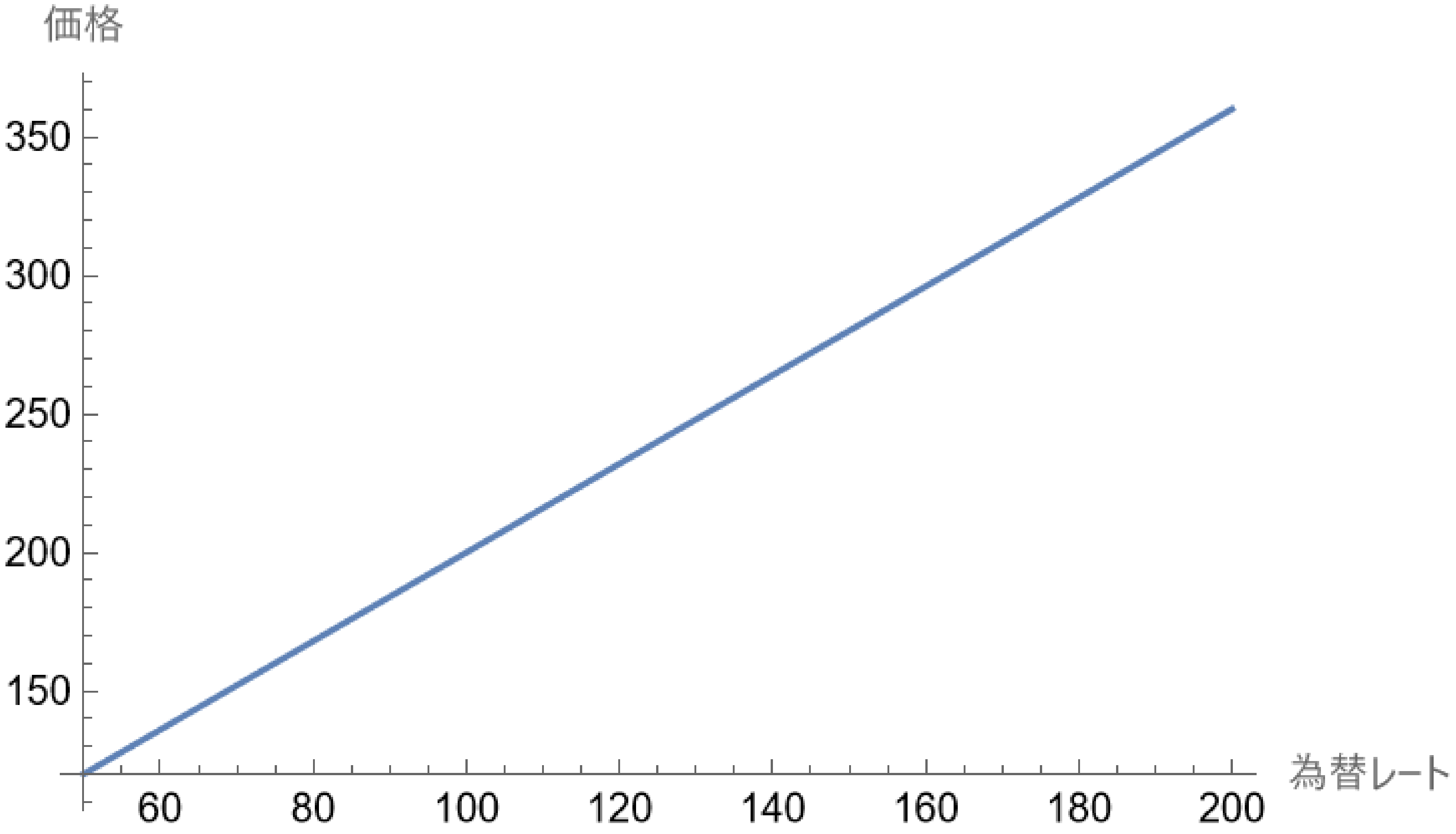
$$200 \times 0.8 \times \frac{150}{100} + 240 \times 0.2$$



為替レートと価格の関係

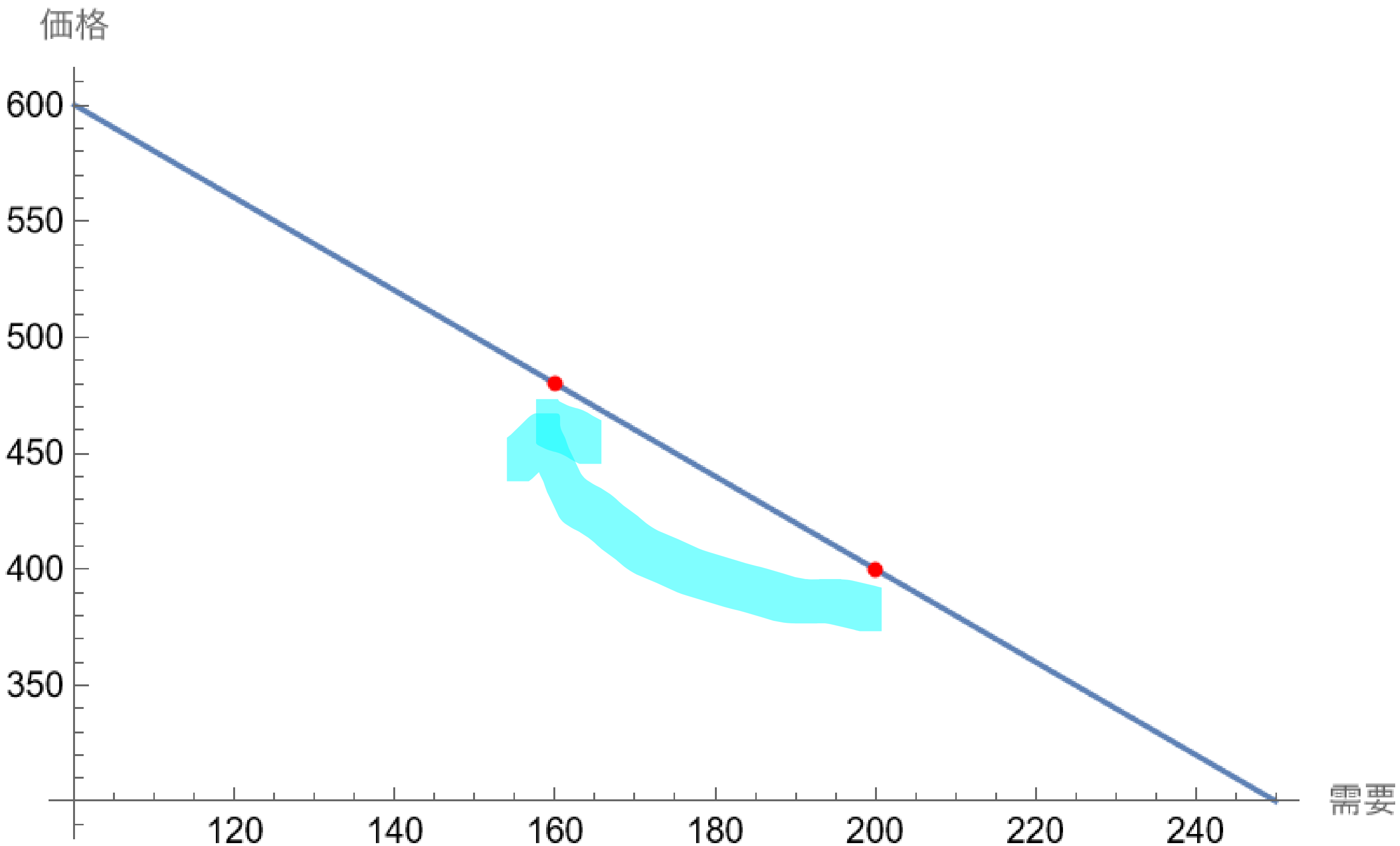
- 小麦と肉はUSDで 1.6USD
- 40円＋ 1.6USD×［レート］

（為替レートに手数料が含まれている場合）



価格と需要の関係
価格が高いと買えません

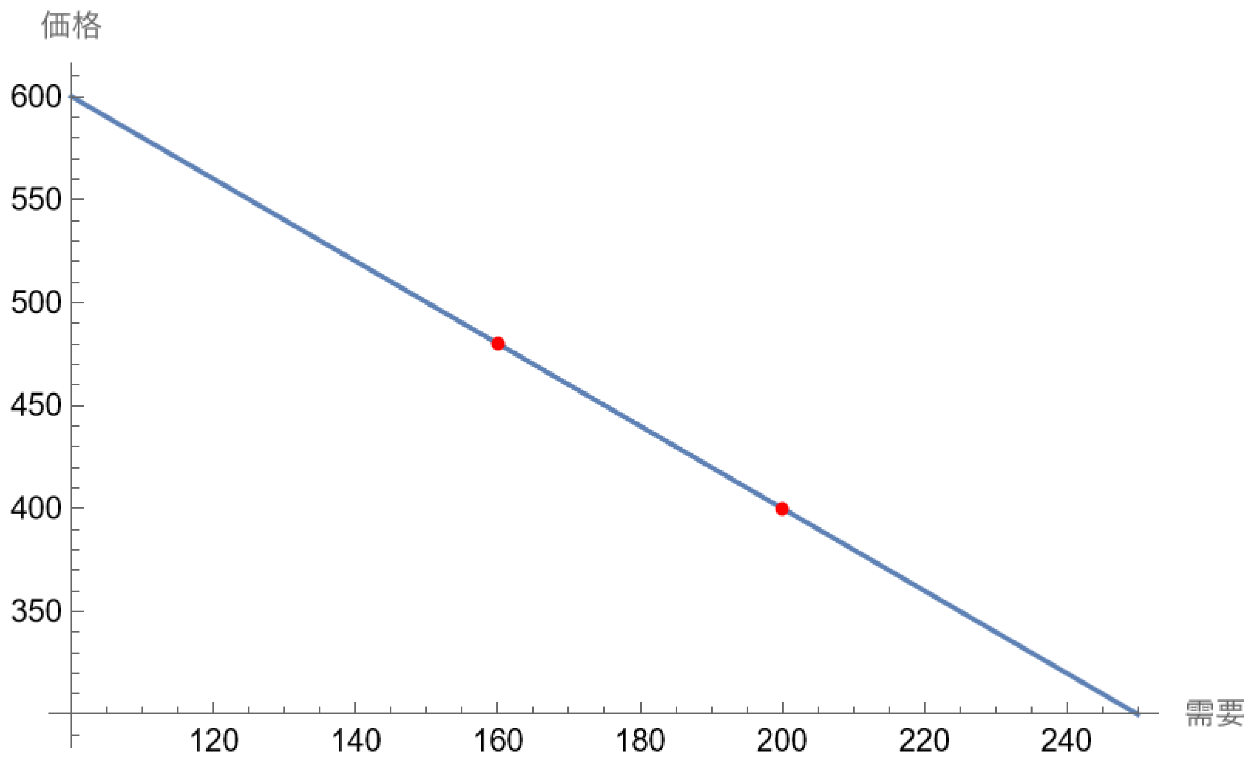
- この店の需要曲線
- price =800-2*demand
- 400円⇒200個
- 480円⇒160個
  値上げすると売れなくなる



レートが100円/$のとき
価格をいくらにするのが利潤最適になるか？

- 利潤=収入ー生産コスト
- 収入＝価格×需要

- 売れる個数を最大化したい
- 簡単化：
  生産コスト＝材料費＋10円
  と仮定
- 材料費200円の場合210円
- 全生産コストは単純に
  販売数倍とする



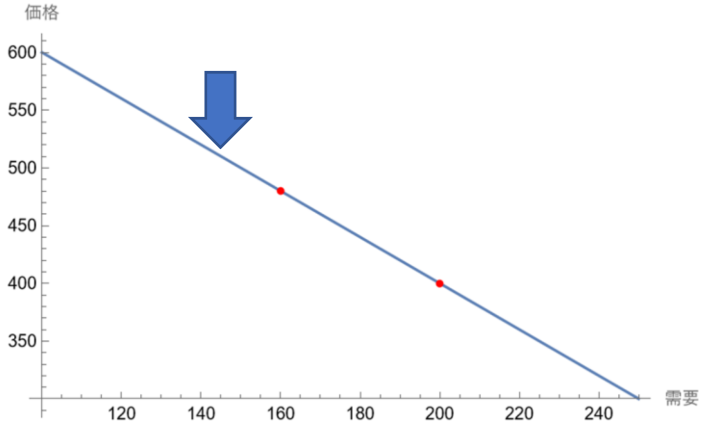
利潤=収入ー生産コスト

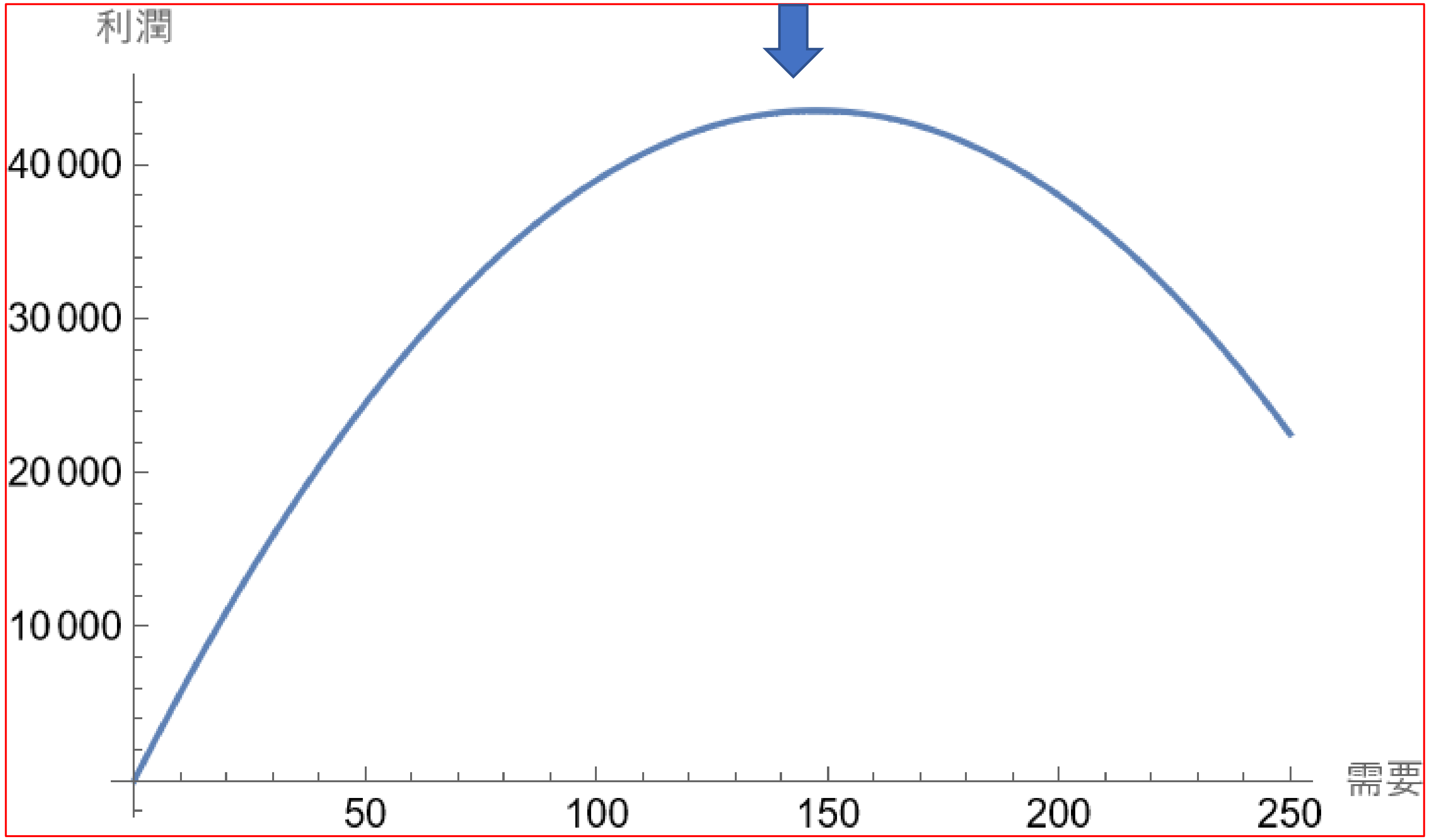
利潤　pi=price*demand - 210*demand

- 変数demandの式

price =800-2*demand

- 最大値を求めよ
- demand=295/2
- price=505

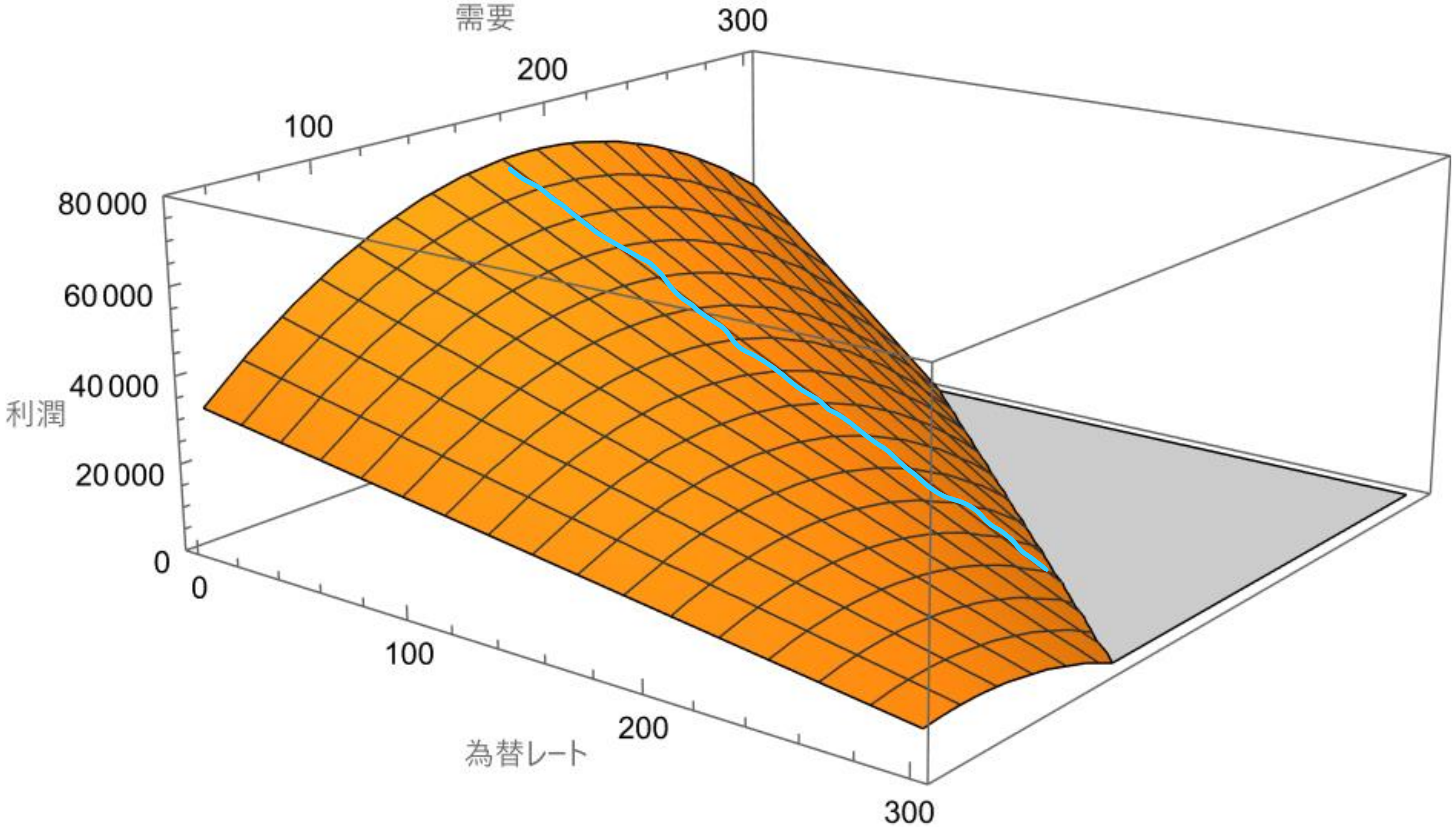




為替レートX が円安になると，利潤の最大値は小さくなっていく

pi2=price*demand-(10+40+1.6・x)*demand

- Pi2= (800-2 demand) demand-demand (40+1.6 x)



目次

原料費値上げのためハンバーガを小さくしたい(気が付かれない程度に)

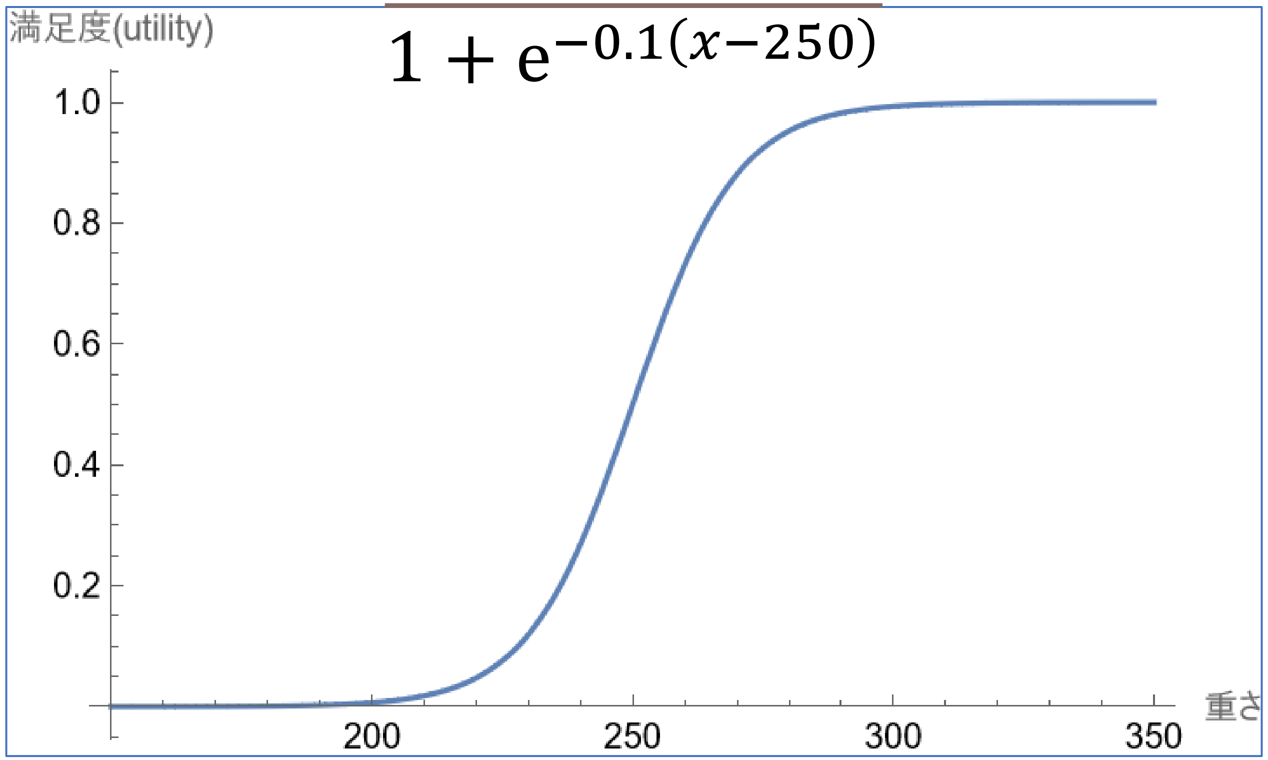
微分：利潤最大化、自然対数の底e

引用：白田由香利：「シグモイド関数による需要予測モデルの構築」，学習院大学経済論集，2023（https://www.gakushuin.ac.jp/univ/eco/gakkai/pdf_files/keizai_ronsyuu/index2.html）

原料費値上げでハンバーガを小さくしたい

- しかし，顧客が逃げるようでは困る
- 小さくできる限界はどの位か？
- 顧客の**重さに関する満足度**の関数モデルを設定（自分でこの位と決める）
- この満足度に比例して，顧客が逃げると仮定する
- 98%に満足度を減らしても大丈夫だろうと思う
- 98%は重さ何グラム？

$$\frac{1}{1+e^{-0.1(x-250)}}$$



自然対数の底、e

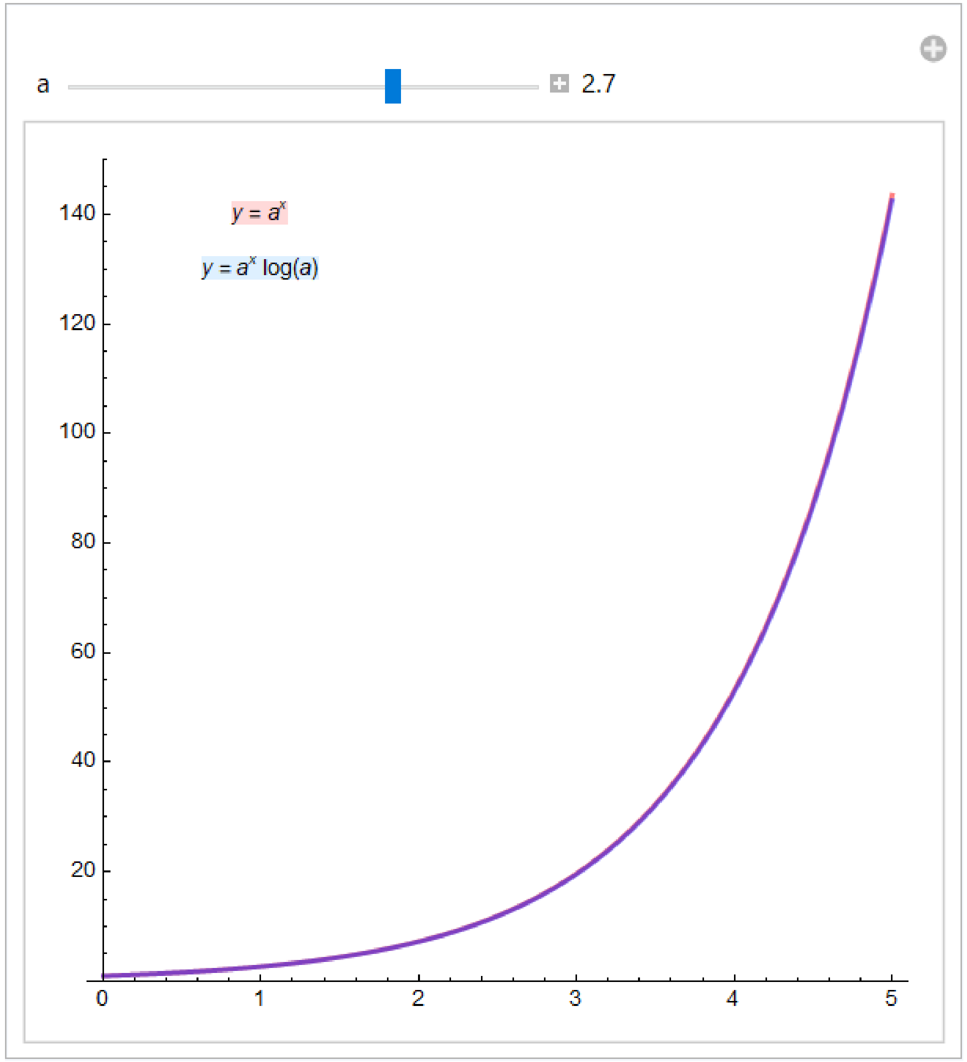
$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

$\frac{d}{dx}a^{x} = a^{x}$ となるようなaを

特別な値として e と名付けた！

理論的に完全に一致する。
近似的に一致ではない。

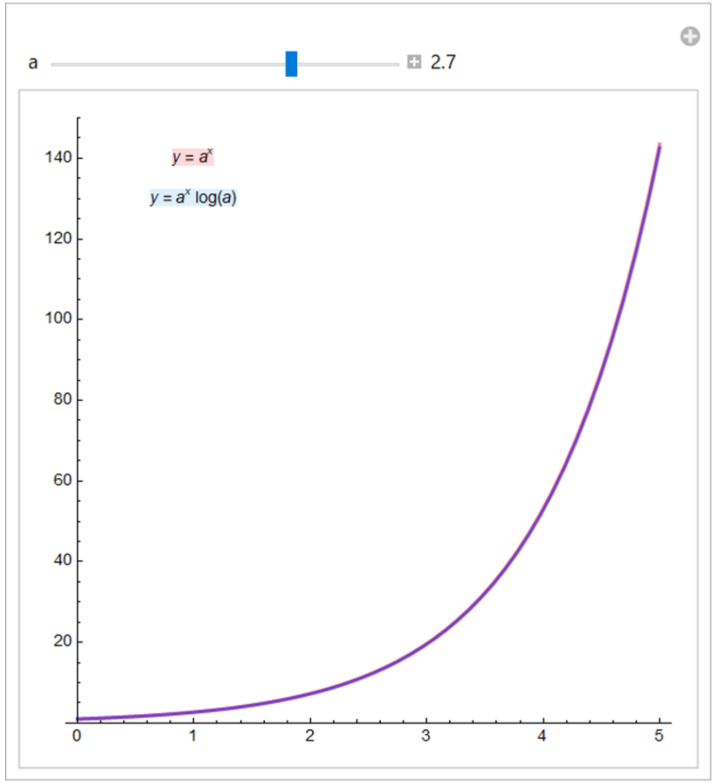
- e≒2.71828
- eの教材ビデオ2個



www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/mathVIDEO/eee.mp4
www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/mathVIDEO/eee2.mp4

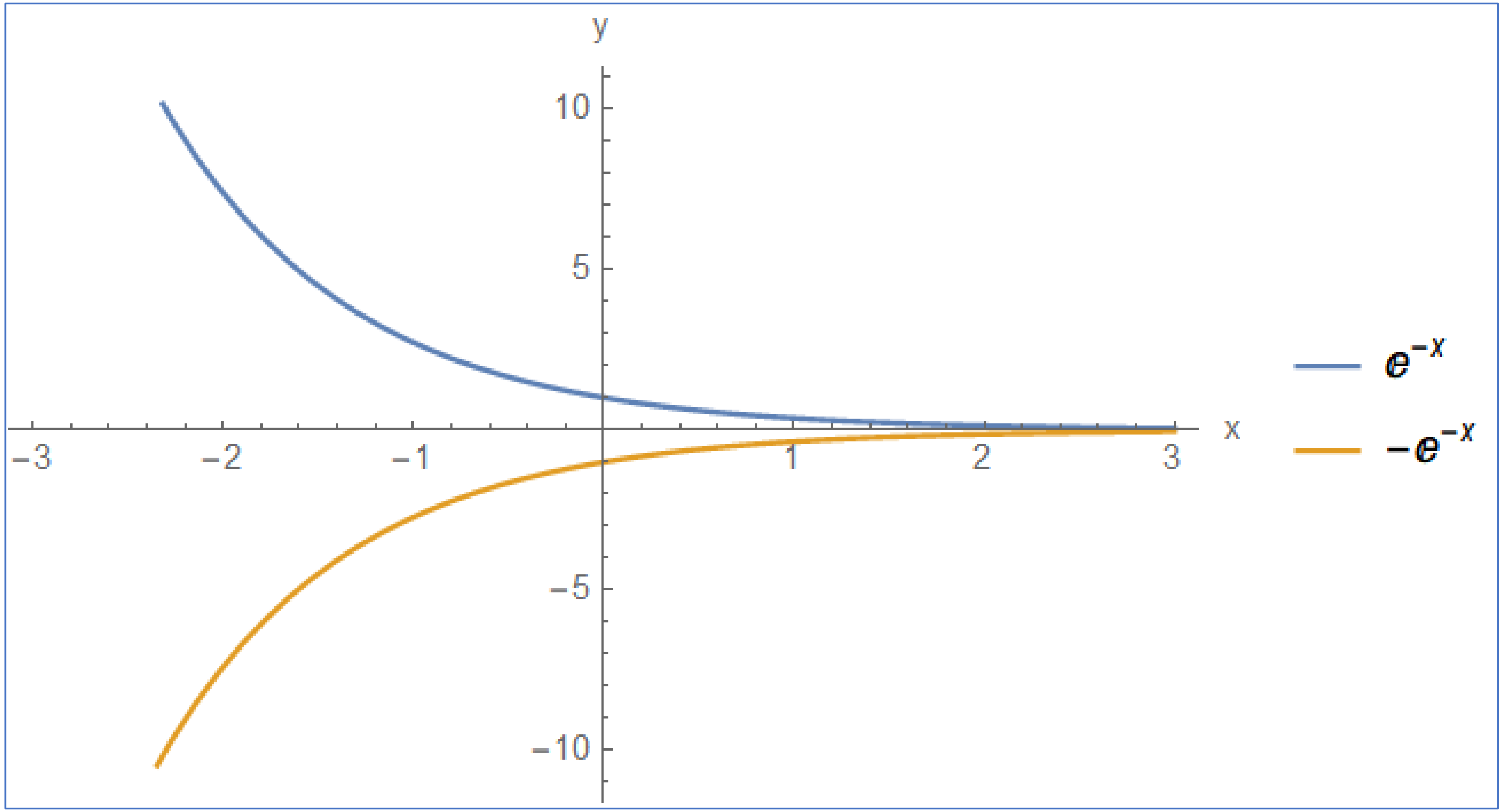
Wolfram　CDF playerで自分で動かしeの値を求める．

- 元の指数関数とその微分が一致するaの値はいくつですか？
- 変数aに直接 2.718と打ち込んでもよいです．

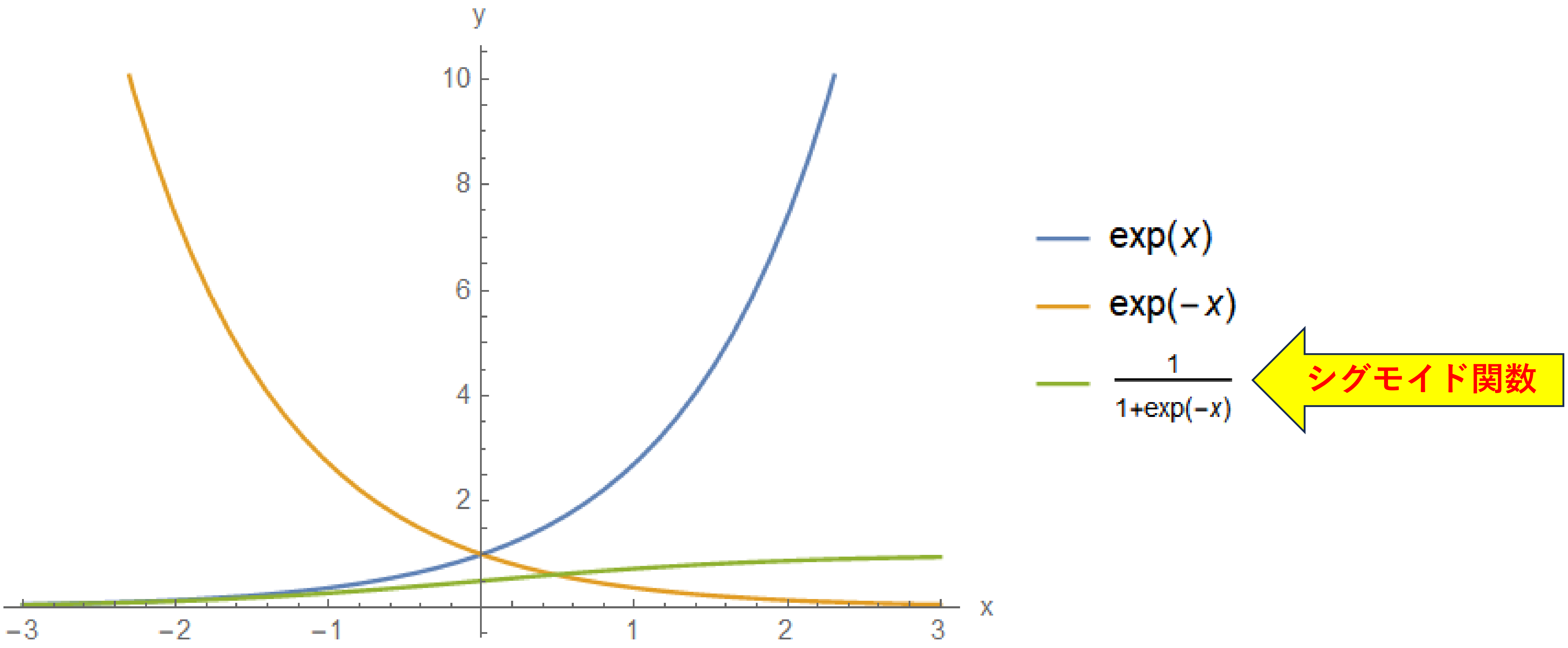


- **グラフィクス教材**
  - http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/private/MAXIMA/CDF/CDFmaterialENG/ENGsample3.cdf

$y = e^{-x}$

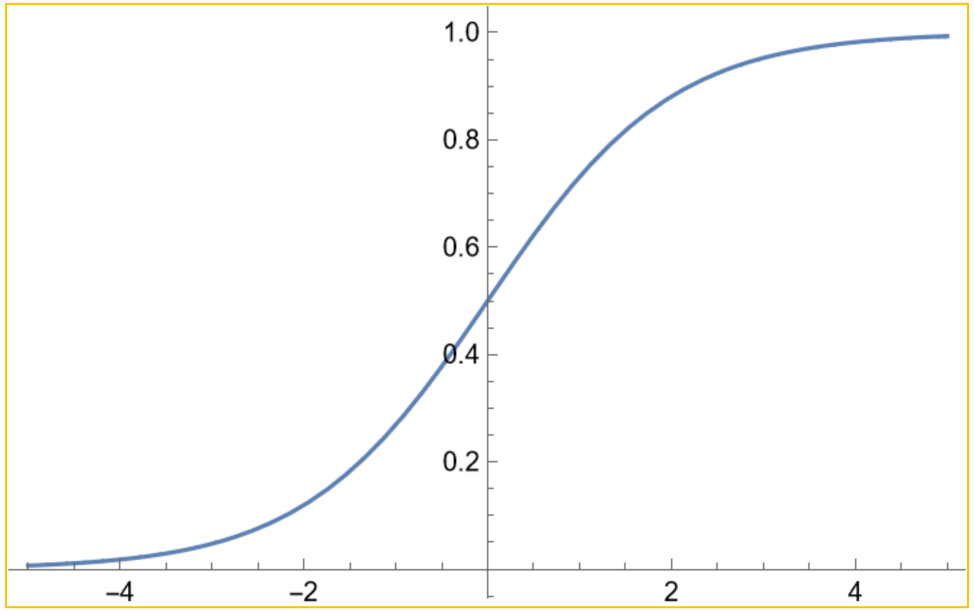
- 

自然対数の底を使った関数



シグモイド関数
AIの深層学習でよく使われる

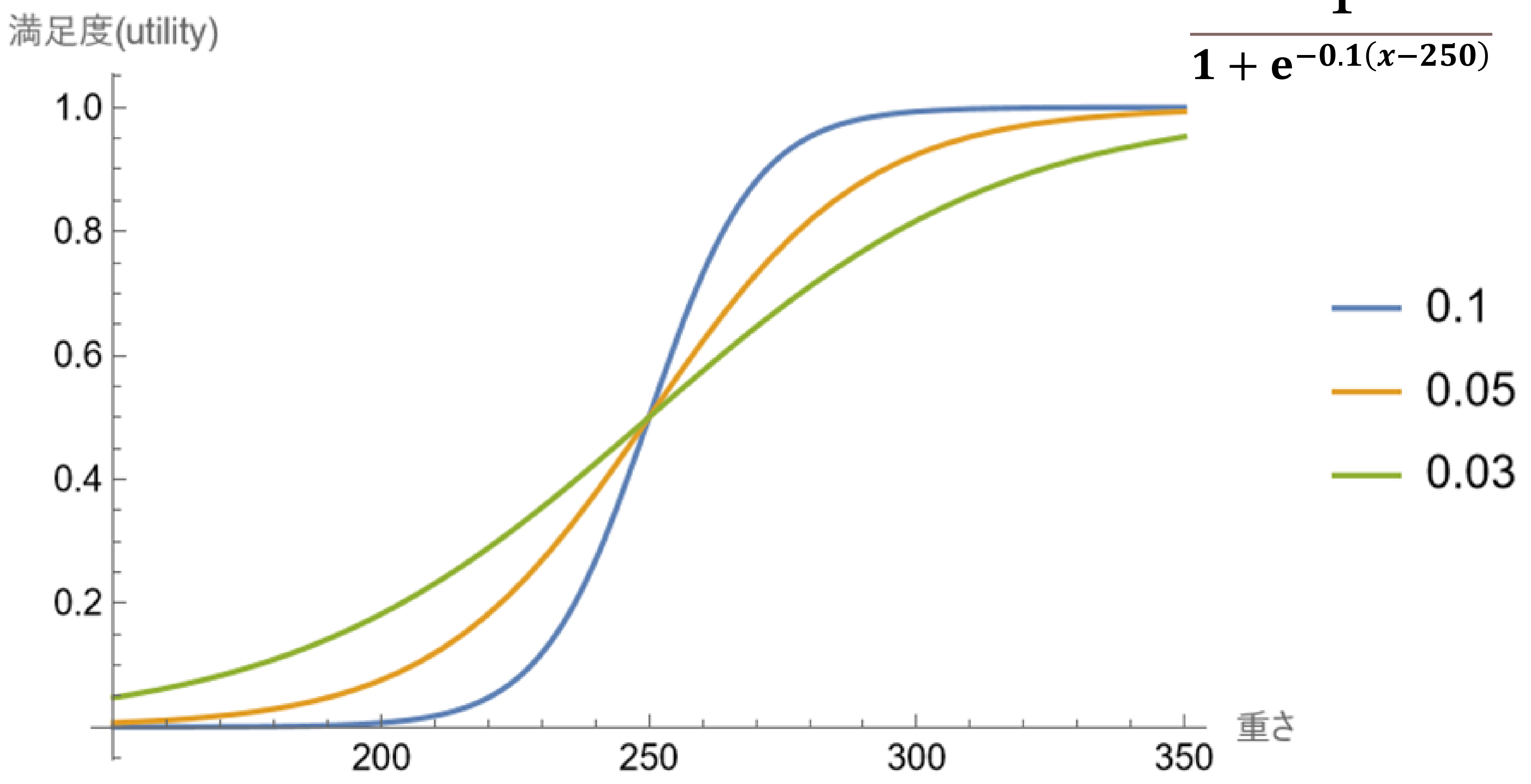
$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



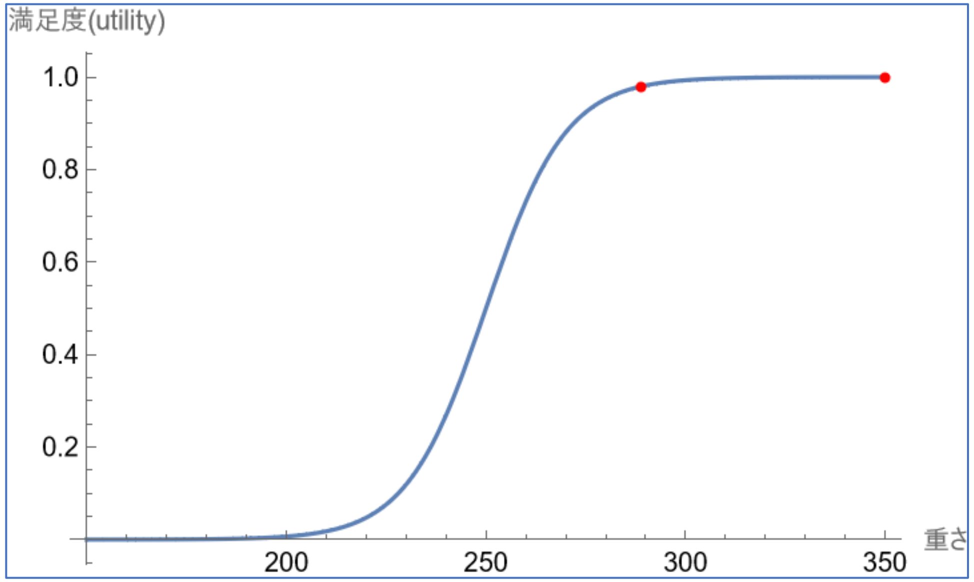
満足度モデルのシグモイド関数を自分の店舗の実状に合わせる

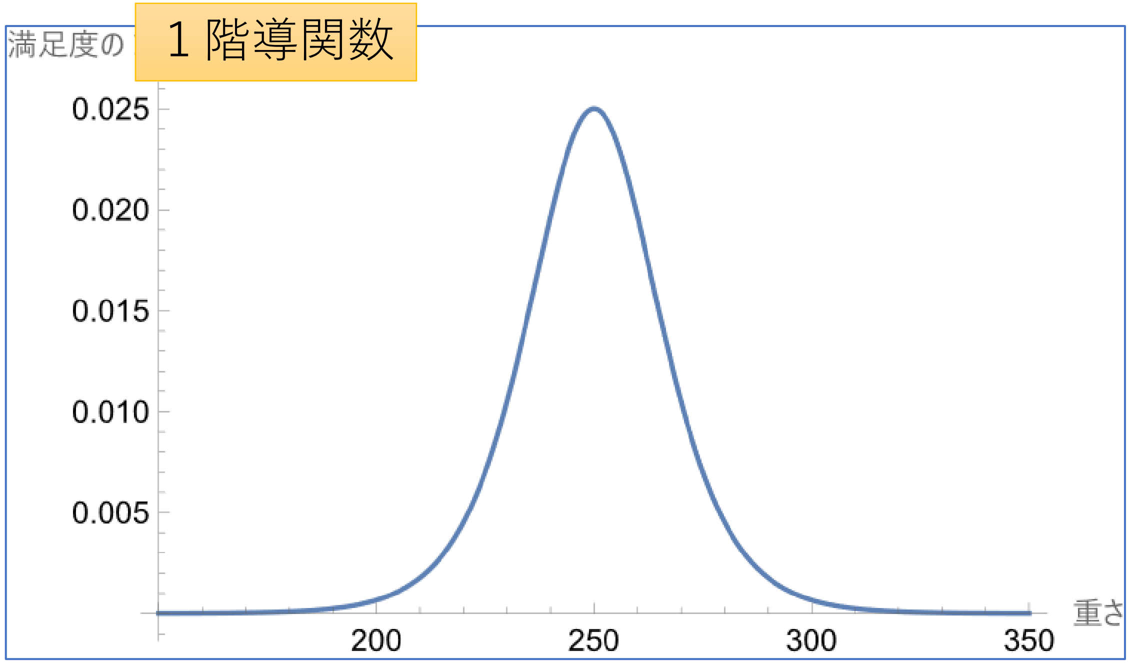
ベースの重さ：250gとして，傾きを決める（満足度50％のライン）

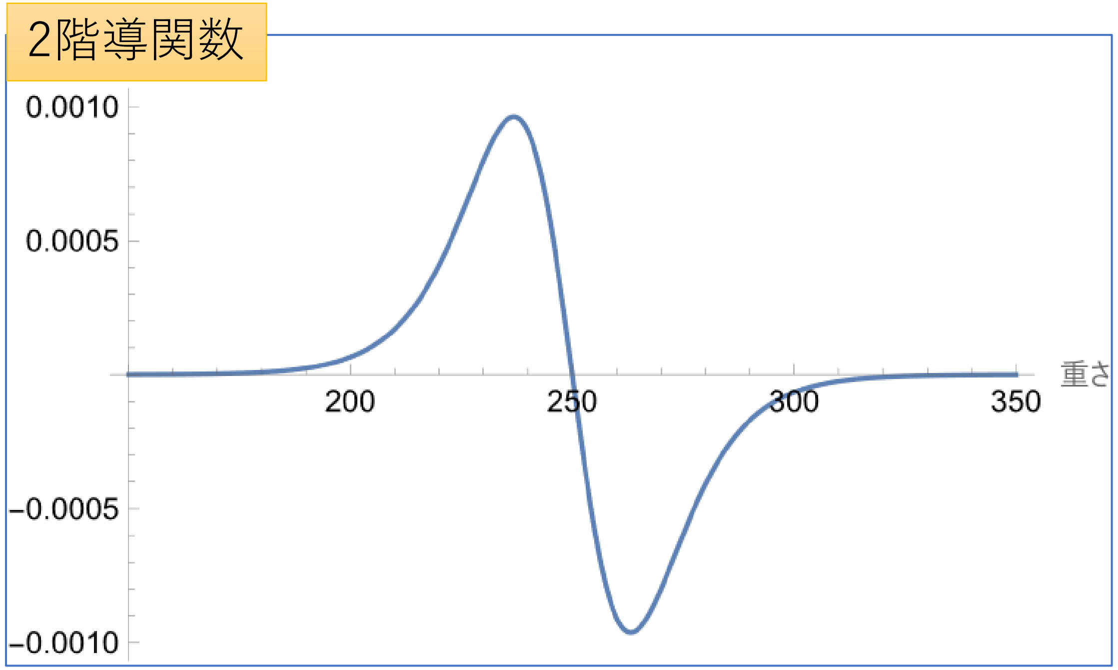
$$\frac{1}{1+e^{-0.1(x-250)}}$$



満足度のモデル
シグモイド関数の微分
1階導関数と2階導関数





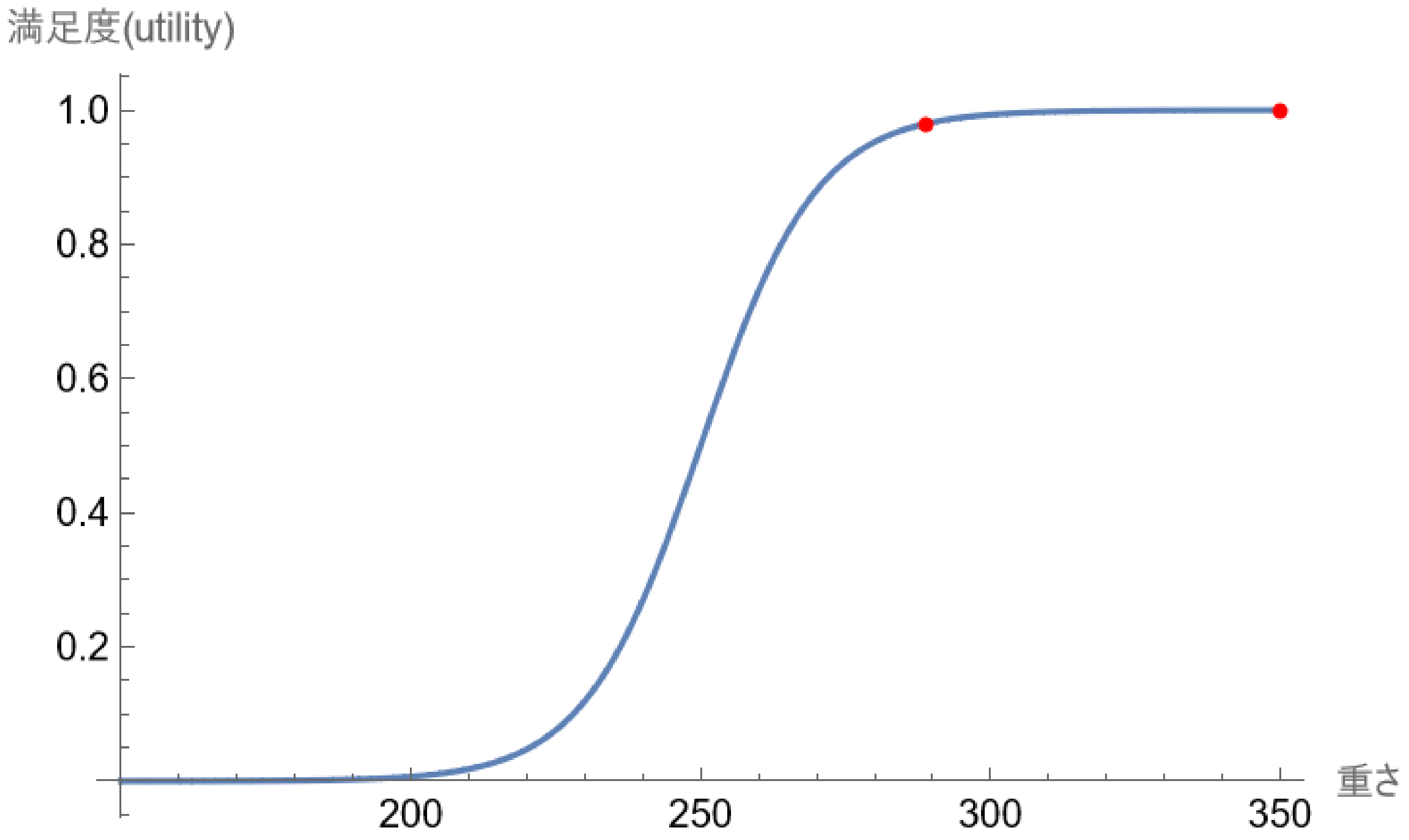


対数方程式を解く（関数電卓をもってくる）

- $\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-0.1(x-250)}}$＝0.98
- Ans.　288.9g

ハンバーガー お客が逃げる限界まで小さくしよう 350ｇから289g

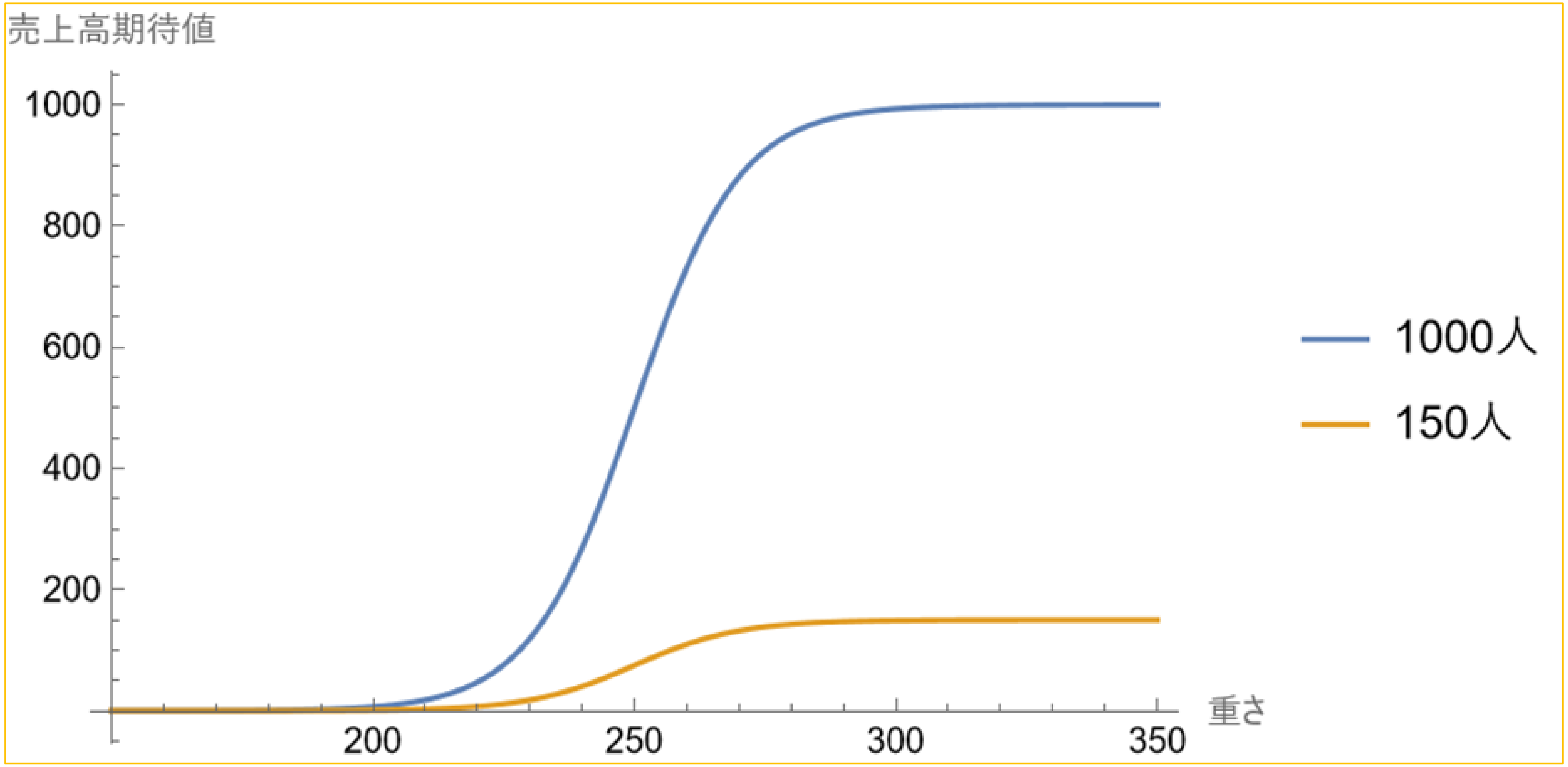
- 98%は288.9g
- 従来 350 gだった
- いくら材料費得したか？
- 需要は多少減少するが生産コストは下げられる



学生の皆様から，そもそも350ｇなど大き過ぎて食べられない，というご意見を頂いておりますが，極端なストーリーにしないと効果が分かりにくいのです（白田）

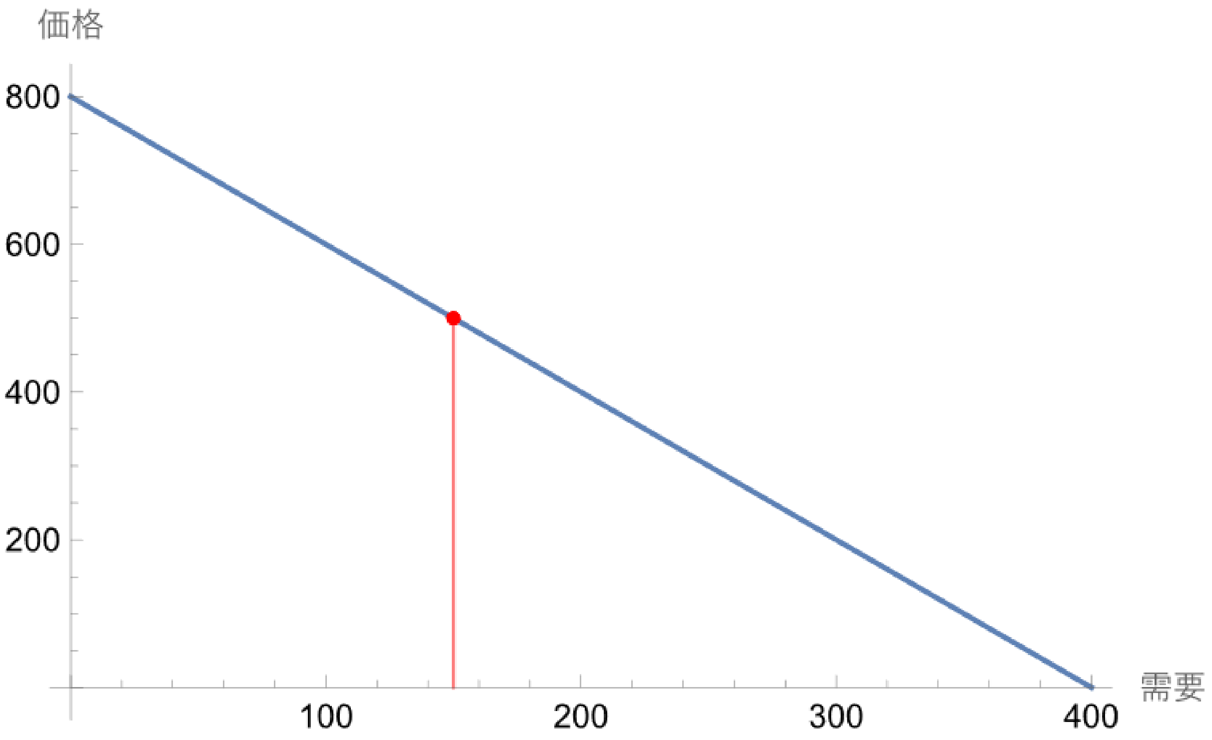
売上期待値は母集団のサイズに依存
そもそもこの店の客の想定総数はどの位？

- 想定総数によって収入は大きく異なる



需要関数　price =800-2*demand

- 現在　500円で、150個売上ている（と仮定する）
- 同じ品質で価格を変えたら、需要はどう変化するか？



問題

現在の価格設定は500円で、その結果平均150個の売上がある。需要関数は$\mathbf{P = 800 - 2 \times D}$とする。経営者は、現在ハンバーガーの重量を350 g としており、生産費用関は$\mathbf{Cost = x \times \frac{200}{350} + 10}$ と仮定する。変数 x はハンバーガの重量である．重量350gの場合、生産費用は210円である。

インフレーションによって材料コストの高騰が予想されるため、価格を変更したい。しかし、値上げは需要の減少が予想されるため避けたい。そこで値上げは行わず、重量を減らすことで現状の利潤を確保するという方針を採用する。重量削減により買ってくれなくなる顧客は2%程度にしたい。ハンバーガーの重量はどこまで減らすことが可能であるか。また、その際の利潤を評価せよ。

経済の公式

- 収入＝ 価格×売上高
- 利潤＝収入―生産費用

- 1個あたりの生産費用 Cost=x×200/350+10
  x ：重量

重さを下げれば需要は下がるが，コストも下がる 98%満足度でよければ288.9gにしてもOK

- 生産コスト＝材料費＋10円
  と仮定
- 材料費200円の場合，生産コストは210円
- 材料費200＊(200/350)
- $Cost = x \times \frac{200}{350} + 10$

- 需要関数
  price =800-2*demand
- 利潤
  利潤＝収入ー総生産費用

  pi=price*demand - cost*demand

pi= (800-2*demand)*demand

- $(x \times \frac{200}{350} + 10)$*demand

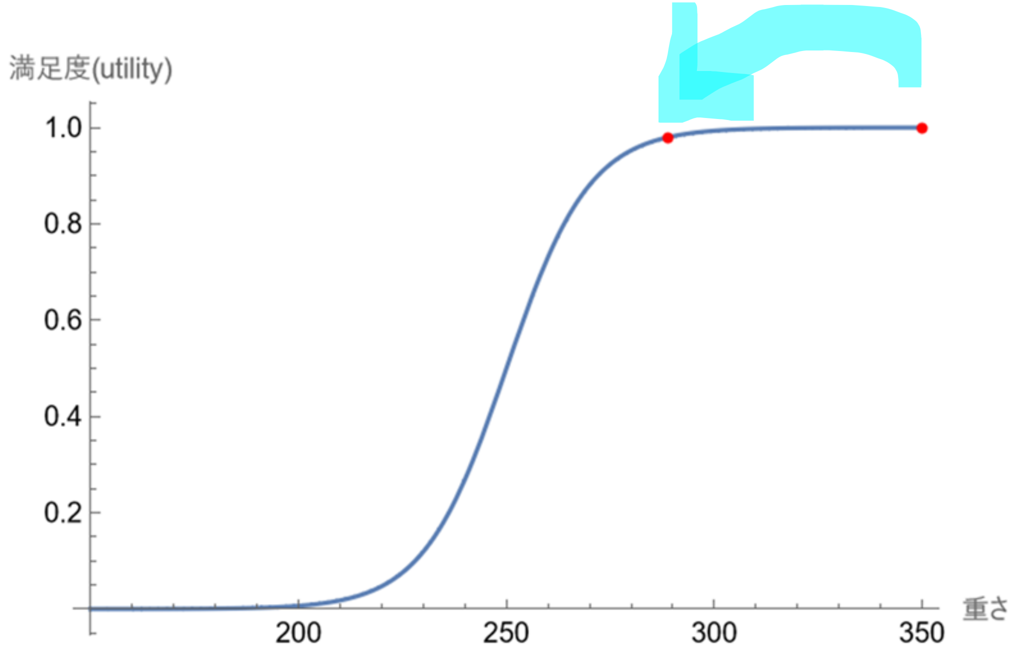
- 仮定として，少し重さを減らしても，需要関数は変わらない重さの範囲とする．あまり小さくすると品質が違う物となり，需要関数も変わってしまうので注意！

経営数学では

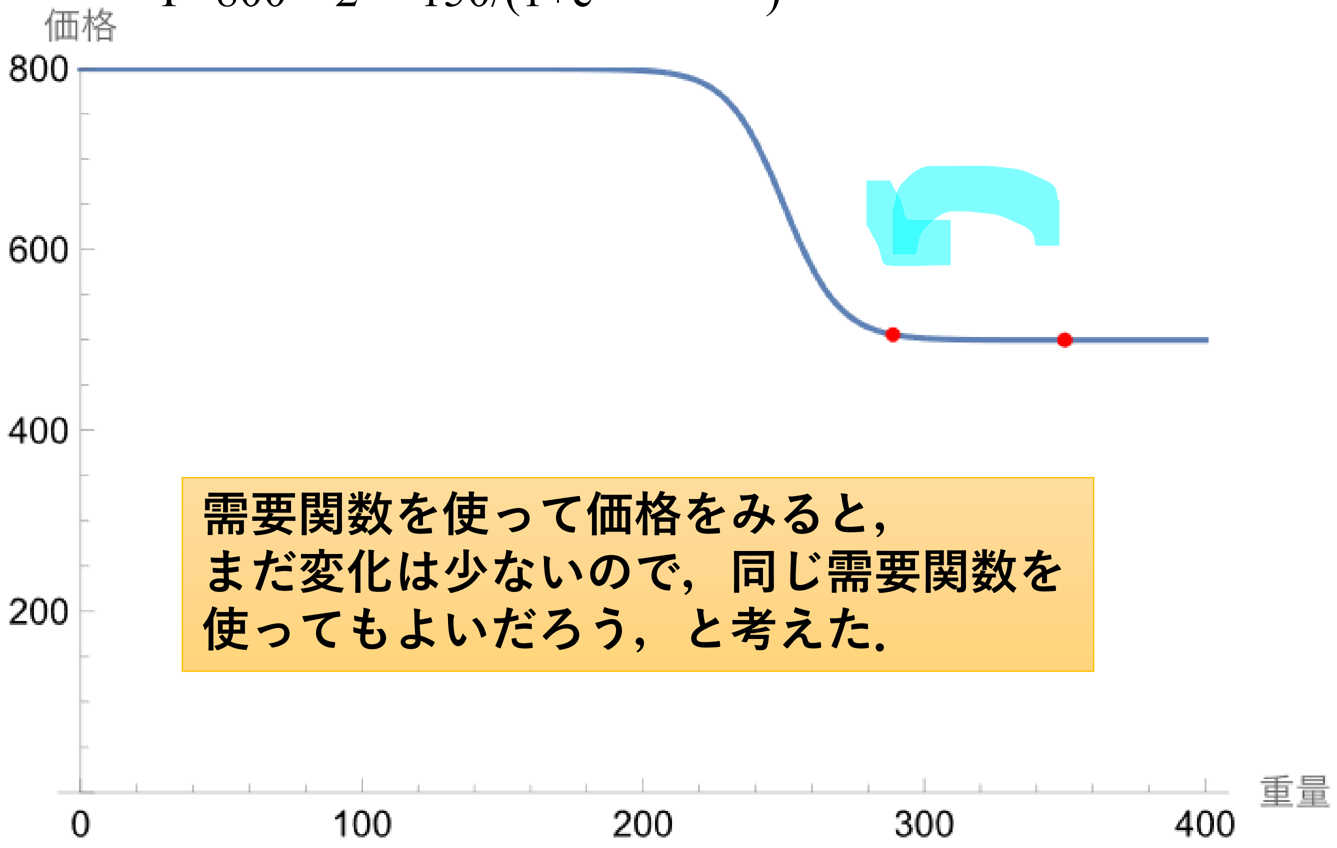
- この数式が成立している変数の範囲はどの程度のところか，というドメインをいつも考えておかなくてはならない．
- そこが，純粋数学とは異なる．
- おにぎりをもらって食べれば，おいしくて満足度が高まるが，5個以上食べさせられたら，苦しくなる．どこで満足度が減少するかは個人で異なる．ともかく，増加関数ではない．
- この数式が成立する範囲は $0<x<3$ というような範囲指定が必要．
- 数式モデルを見たら，これが成立する範囲は，少なくとも正である，とか，正で10以下程度，というように考えてみよう．

現在　重さは350ｇ 288.9gに減じたい

- ユーティリティー

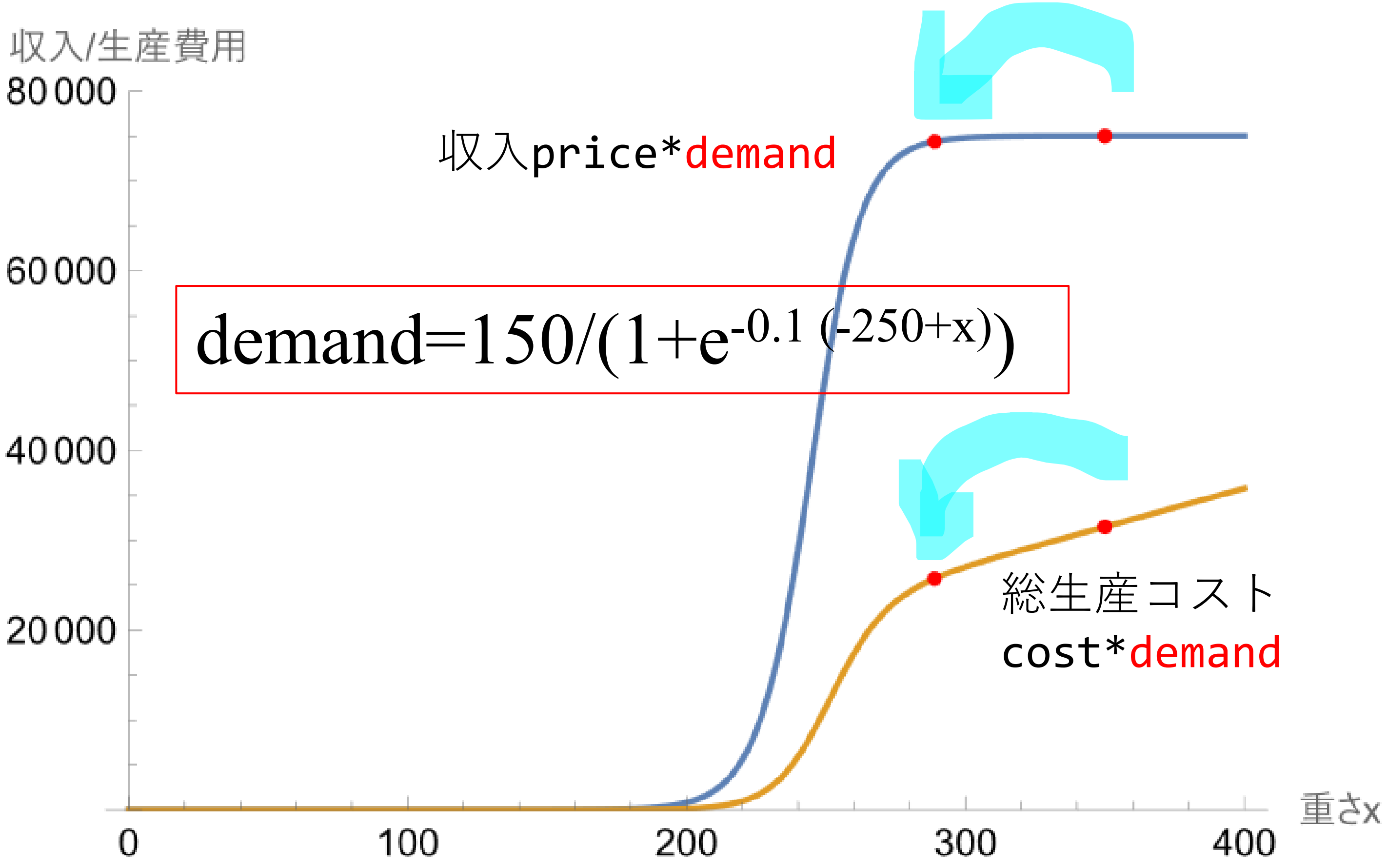


- 価格と重さの関係
- 需要関数にシグモイドを代入
  - $P=800-2\times 150/(1+e^{-0.1(-250+x)})$



需要関数を使って価格をみると，
まだ変化は少ないので，同じ需要関数を
使ってもよいだろう，と考えた．

収入は小さく減少
生産費用は大きく減少.その差が利潤.



利潤にピークができる．その値は？

- 275.3 g で利潤最大
  約50000円

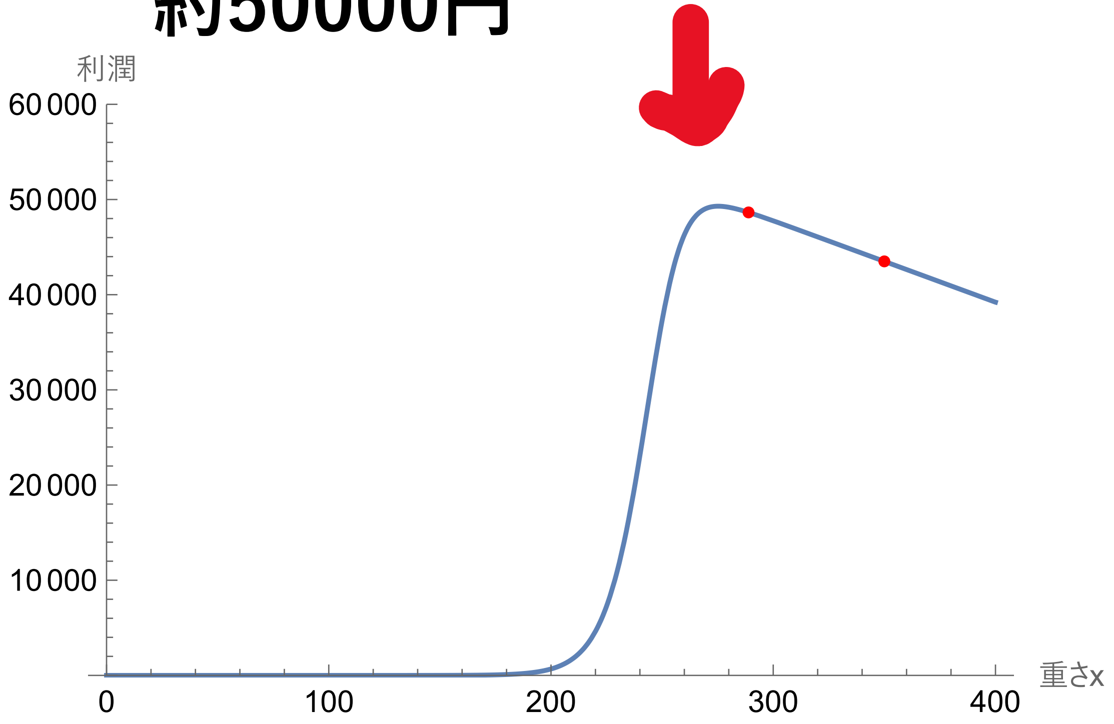


図 10: 重量削減による利潤の変化

微分して，導関数＝０のｘの点が最大値

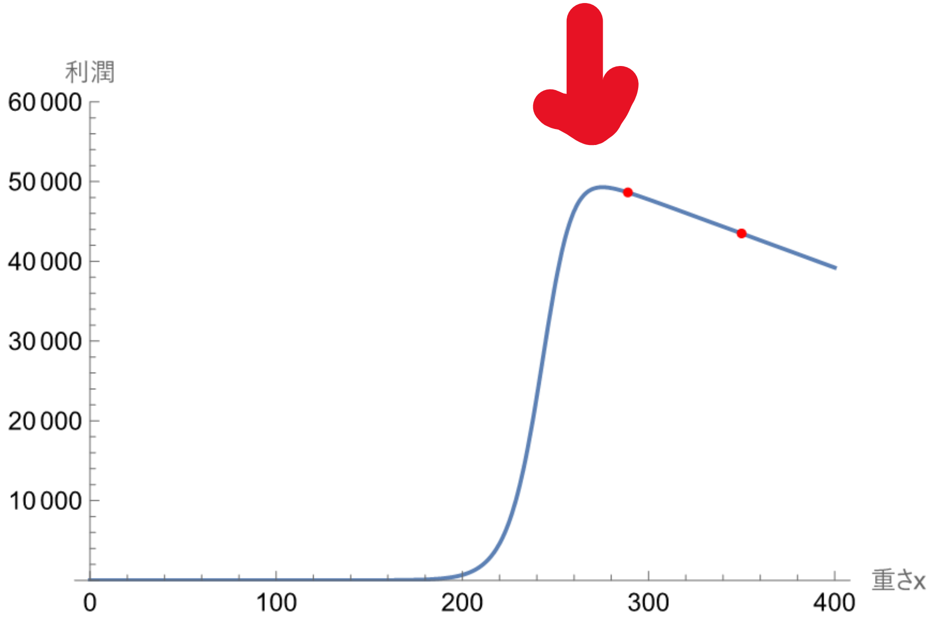
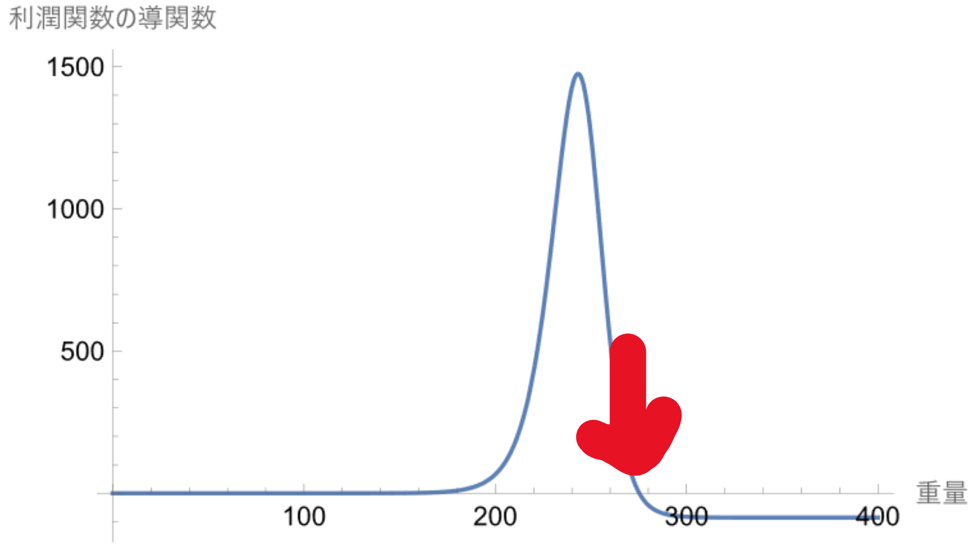


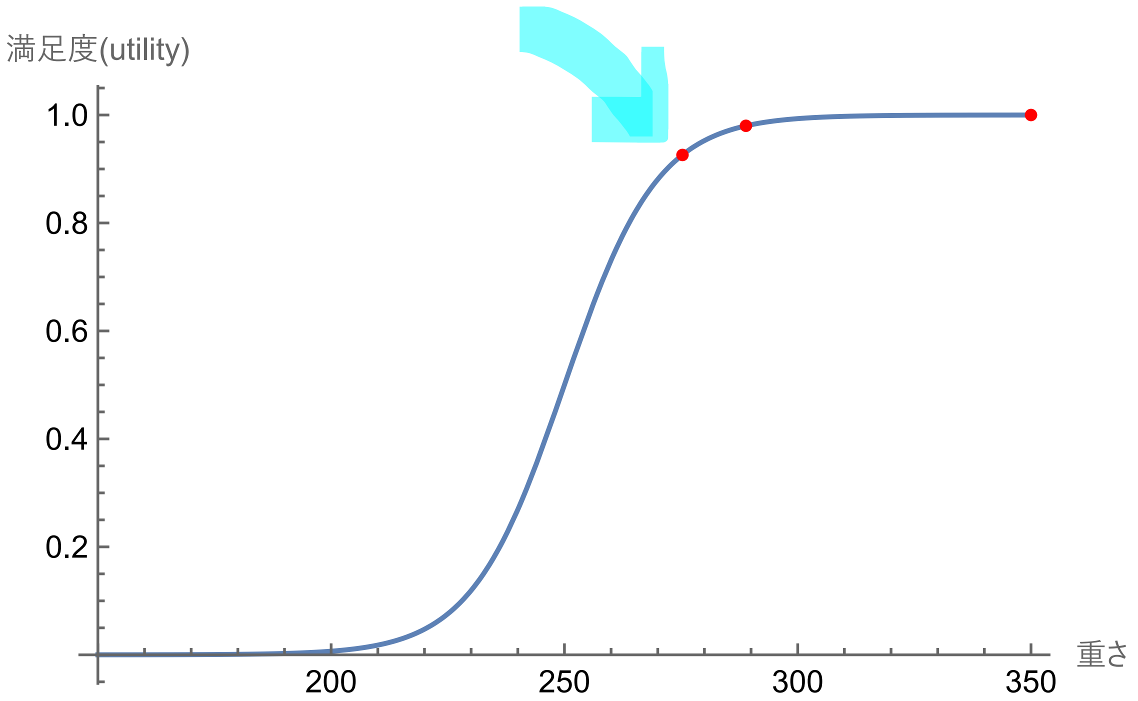
図 10: 重量削減による利潤の変化



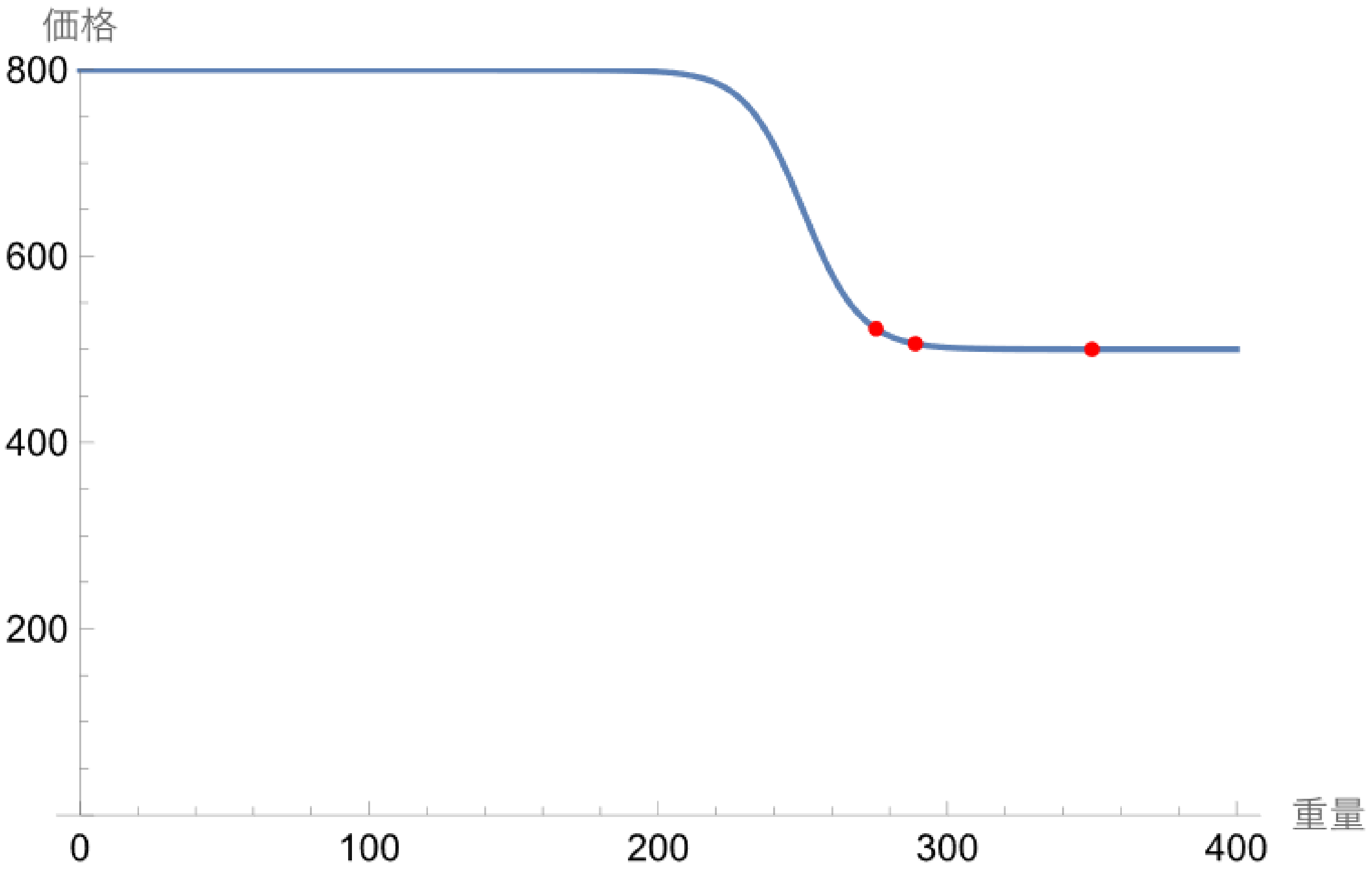
275.3 g

利潤最大となる重量は275.3g

- 275.3ｇでutility 92.6%



需要関数据え置きの条件は満たしているか？



まとめ

- 円安で材料費が高騰する．しかし，価格に即反映すると需要が減少するので，価格は変えにくい．よって小さくすることを考える．
- 顧客満足度があまり減らない範囲98%にすると材料費が抑えられて，利潤がかえって大きくなった．
- では，小さくできる限界はどこか利潤最大化問題として解いた275.3ｇ．これ以上小さくすると，いっきに顧客満足度が減少し，ついで，需要も落ちる．

満足度をシグモイド関数でモデル化した点がポイント