2024年前期
経営数学1
経営のためのラグランジュの未定乗数法

2024年2月25日

学習院大学経済学部経営学科　教授

白田　由香利

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

今月中に2000個製造せよ：機械と人手どちらを増やす（偏微分）

白猫まんじゅう
今週中に2000個作って納入せよ

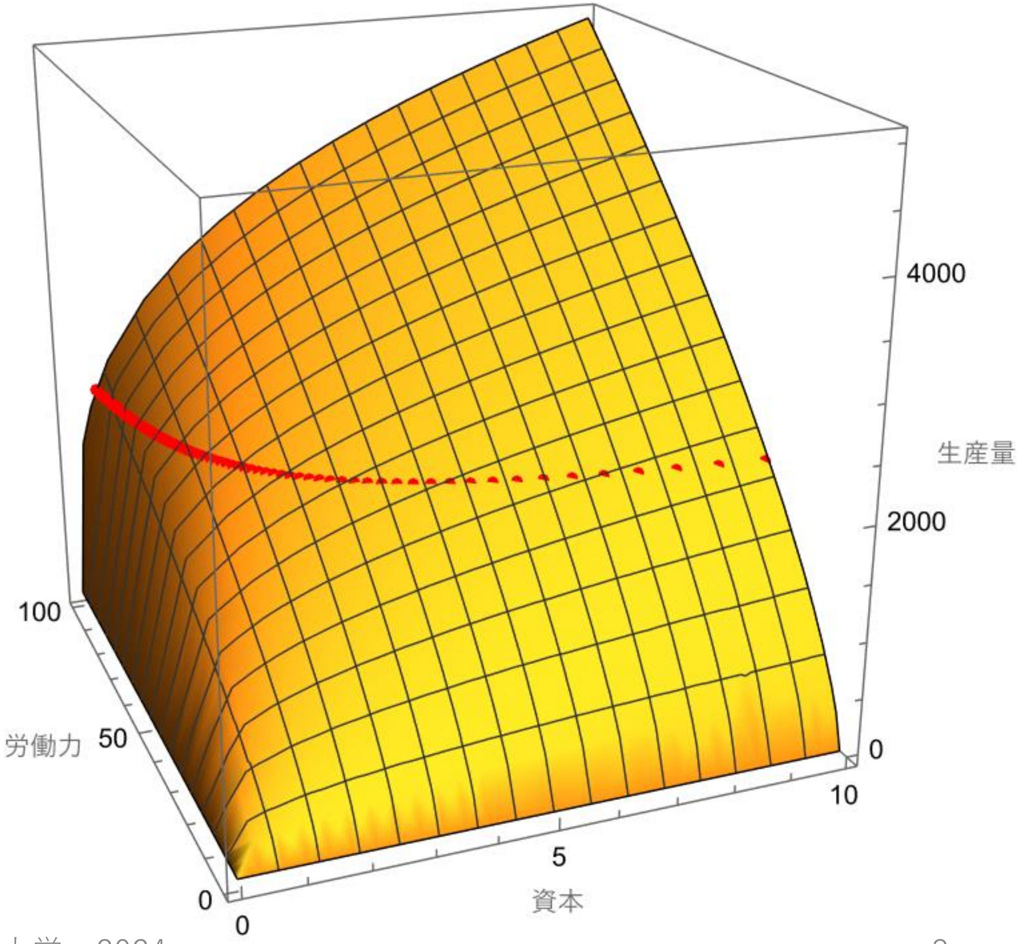
- 生産高を増やすには．．資本，労働力
- 製造機械 K個導入
- 人手　L人導入（猫の手も借りたい）

- コブ・ダグラス型生産関数

$$Q(K,L) = 100K^{0.3}L^{0.7}$$

- 2000個作るためのK, Lの組合せも多数ある

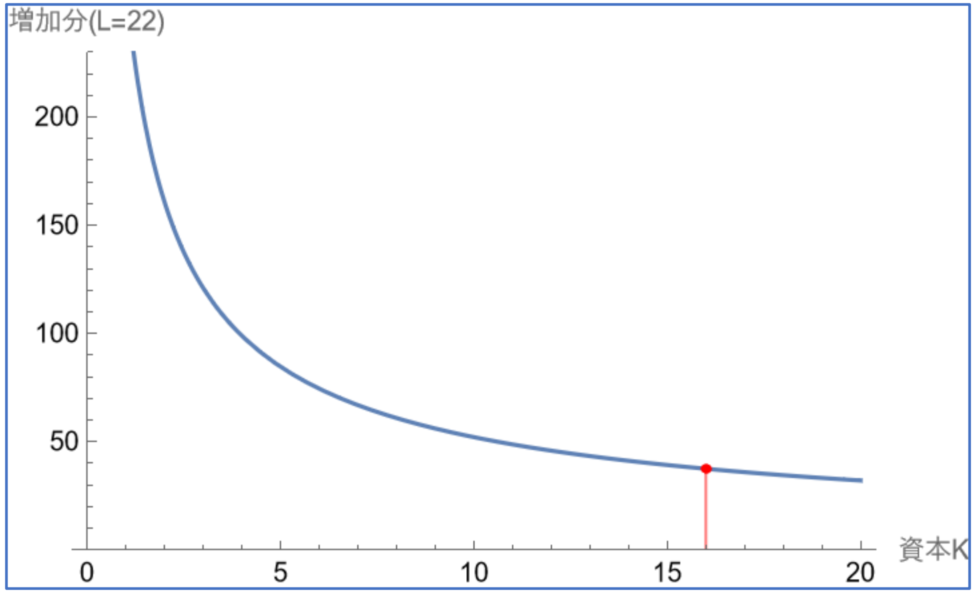
(1)機械1個と70人，(2)機械16個と22人

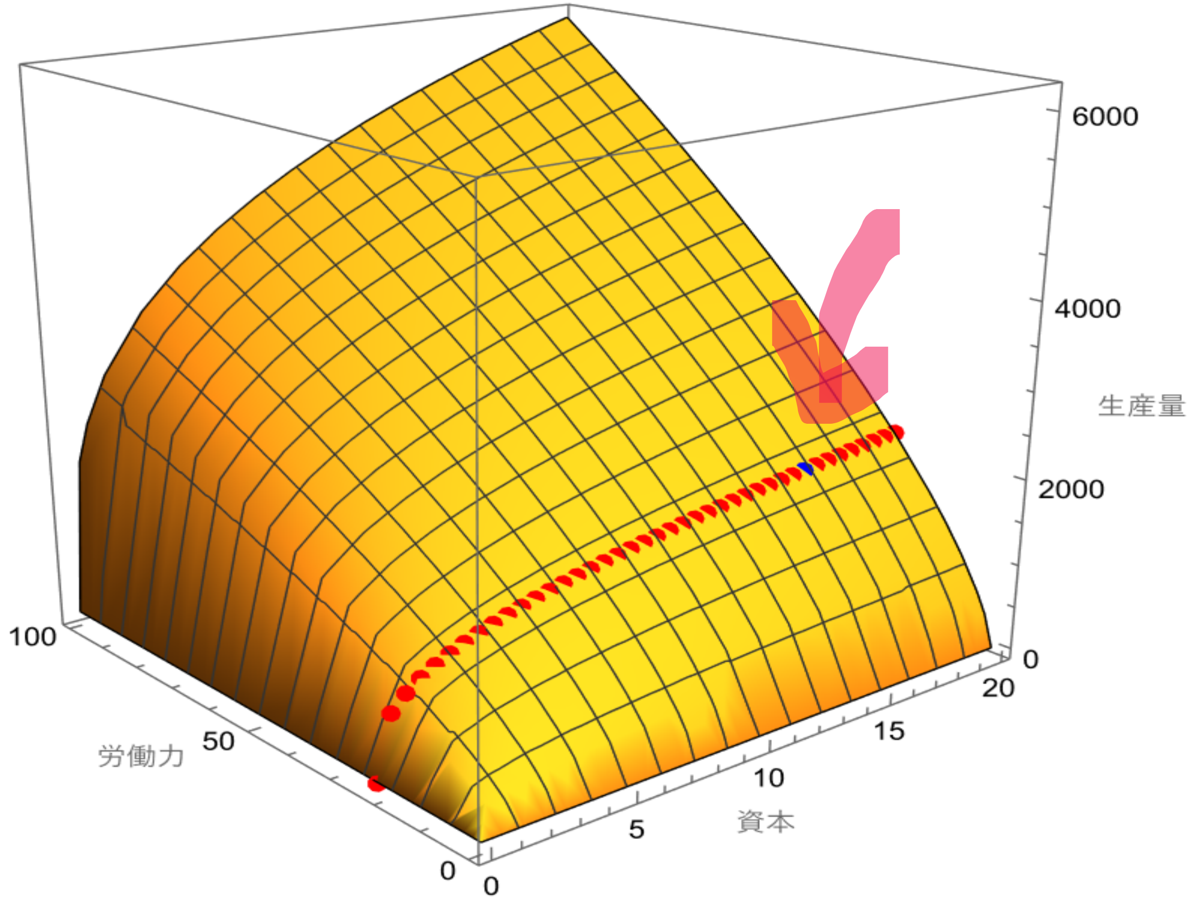


機械16個で22人で作っているとき機械1個増やしたら何個増産できるか

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 30\frac{L^{0.7}}{K^{0.7}}$$

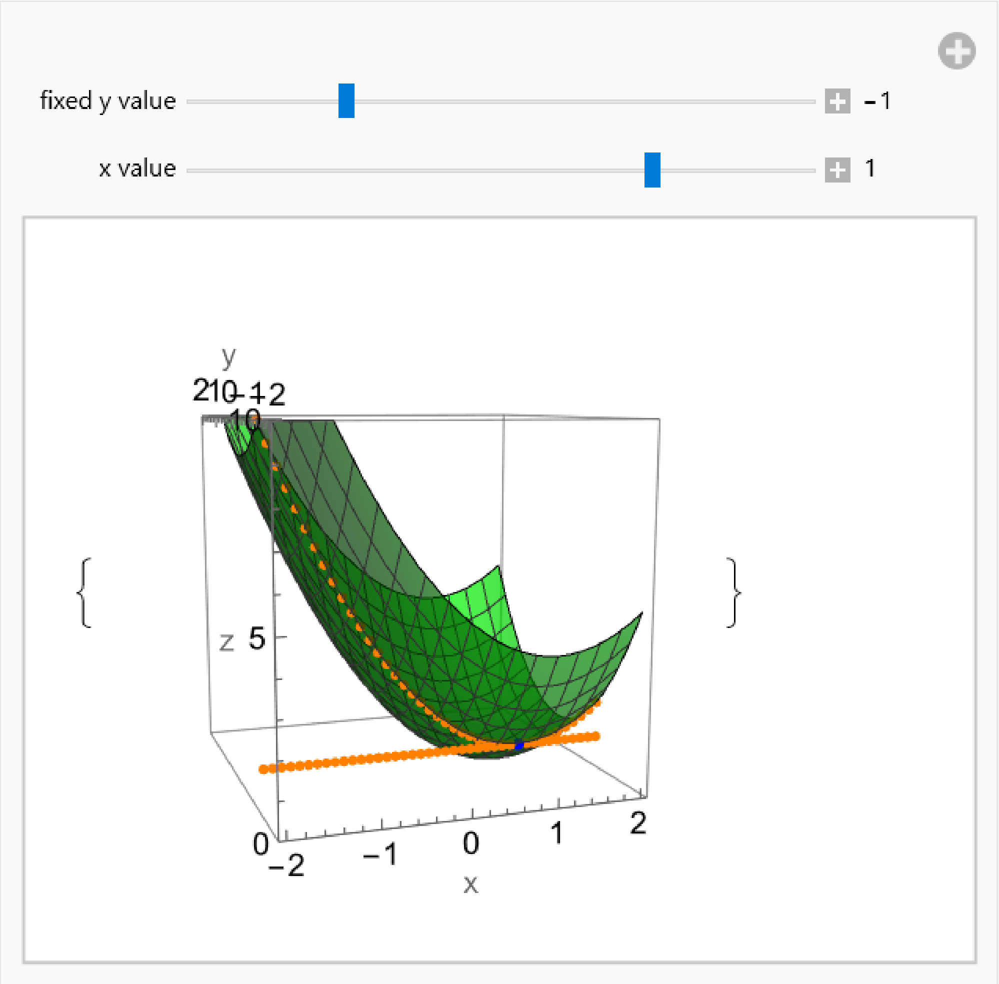
- 約37.5個増産できる
- $(30 \times 22^{0.7})/16^{0.7} \fallingdotseq 37.49$





偏微分とは

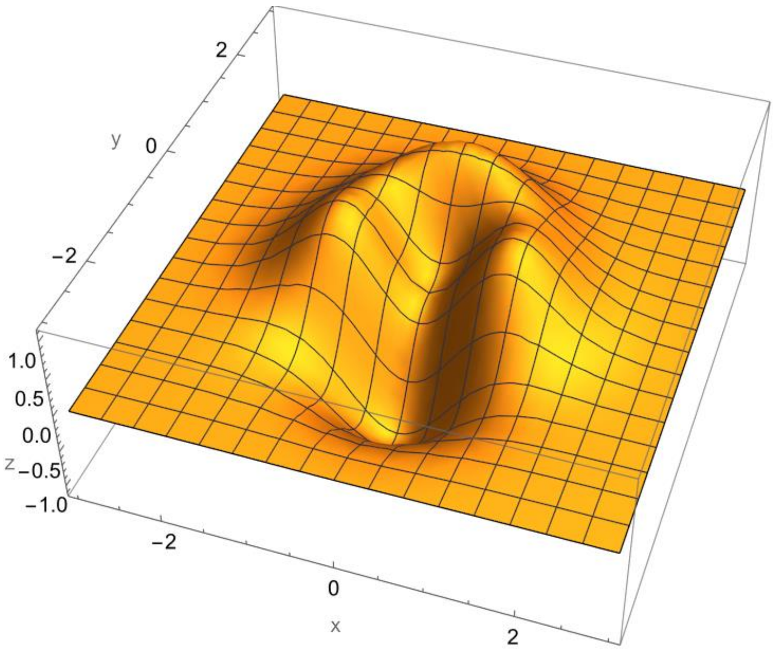
- $z=(x-1)^2+(y)^2$

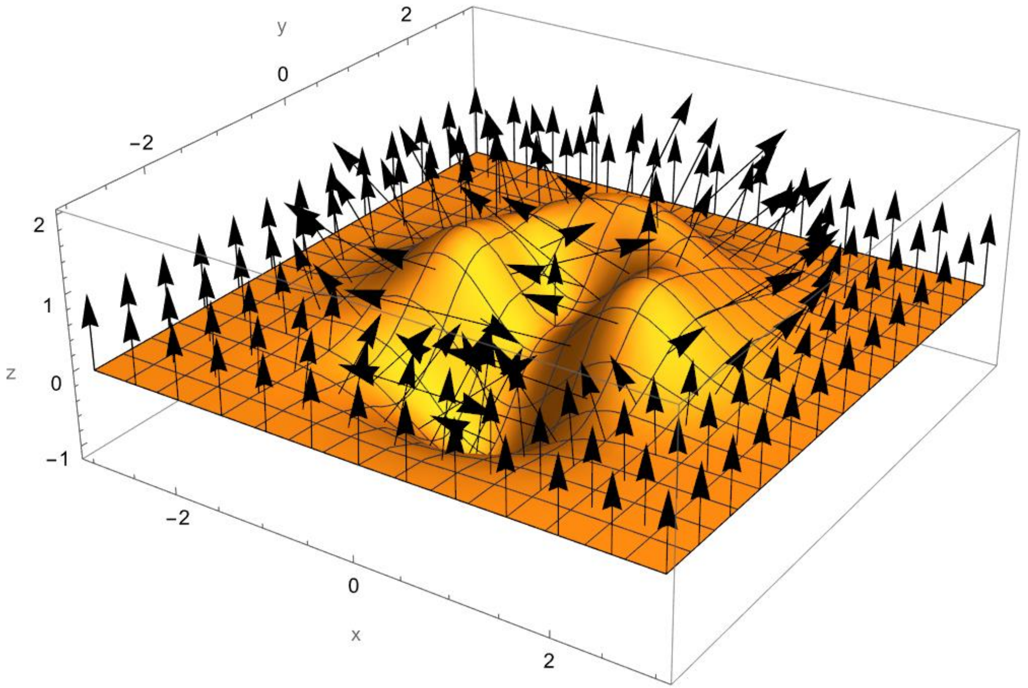


- グラフィクス教材
www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2024/materials/CDF/partialDiff1.cdf
- 教材ビデオ
www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2022/VIDEO/partialdif.mp4

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

偏微分による法線ベクトルの計算



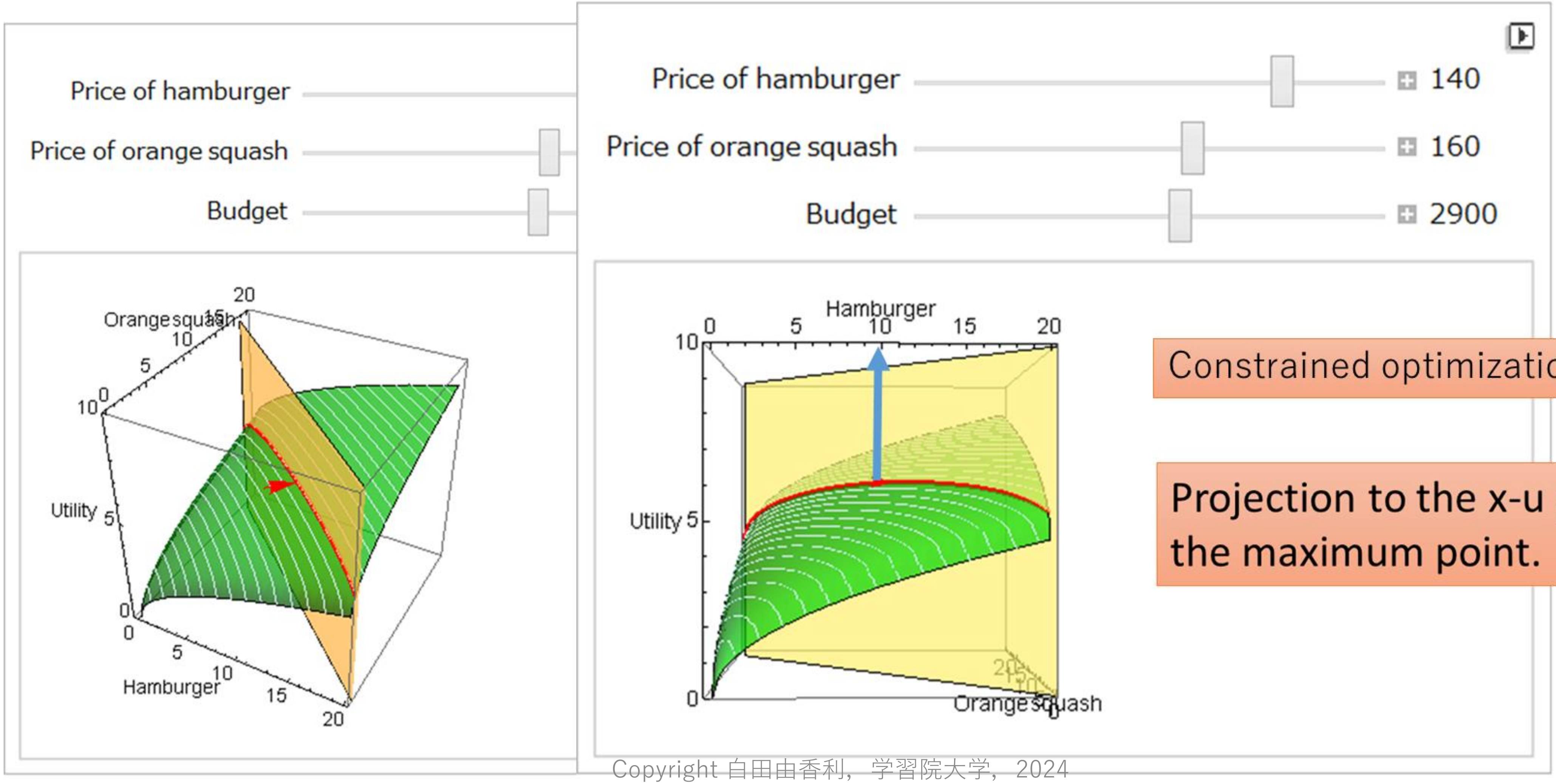


- 教材グラフィクスとビデオ
- www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2024/materials/CDF/partialDiff2aaa.cdf
- www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2022/VIDEO/pudding.mp4

お小遣いの最適投資バランス
ラグランジュの未定乗数法

3000円で，ハンバーガー x 個とドリンク y 個を買って，utility最大化したい．

白田：「悩める学生のための経済・経営数学入門 —3つの解法テクニックで数学アレルギーを克服!」，共立出版
第１３章　多変数関数の制約付き最適化問題



Constrained optimization problem

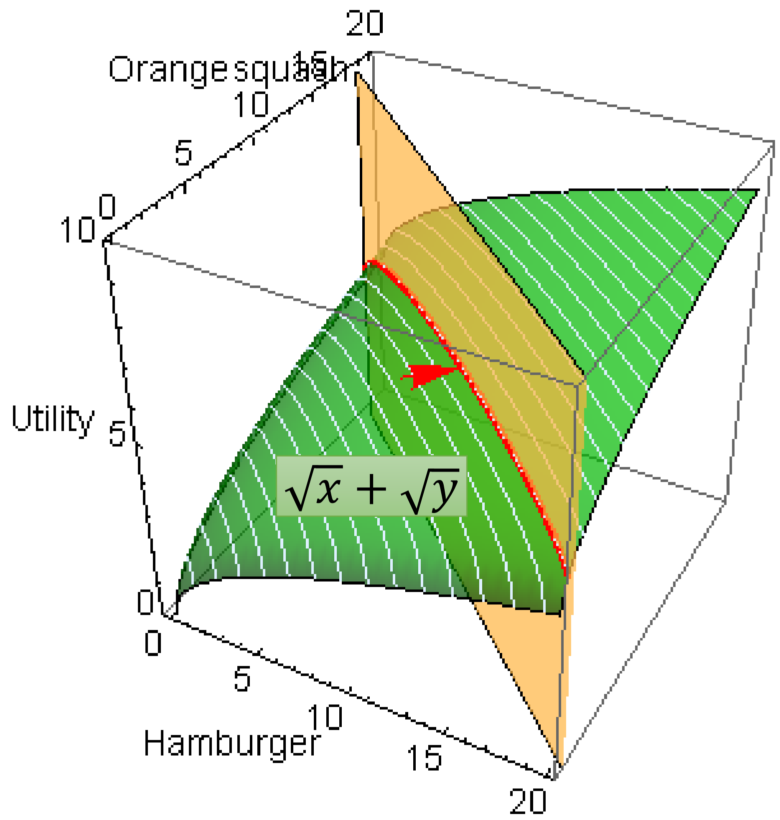
Projection to the x-u plane of the maximum point.

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

Price of hamburger 140

Price of orange squash 160

Budget 2900



Given Data

- $Ph \cdot x + Po \cdot y = M$
- $u = u(x, y)$

Unknown

- $\frac{\partial u}{\partial M} = ?$

$$F(x,y,\lambda) = u(x,y) + \lambda[M - (Ph \cdot x + Po \cdot y)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial M} = \lambda$$ Lagrange multiplier

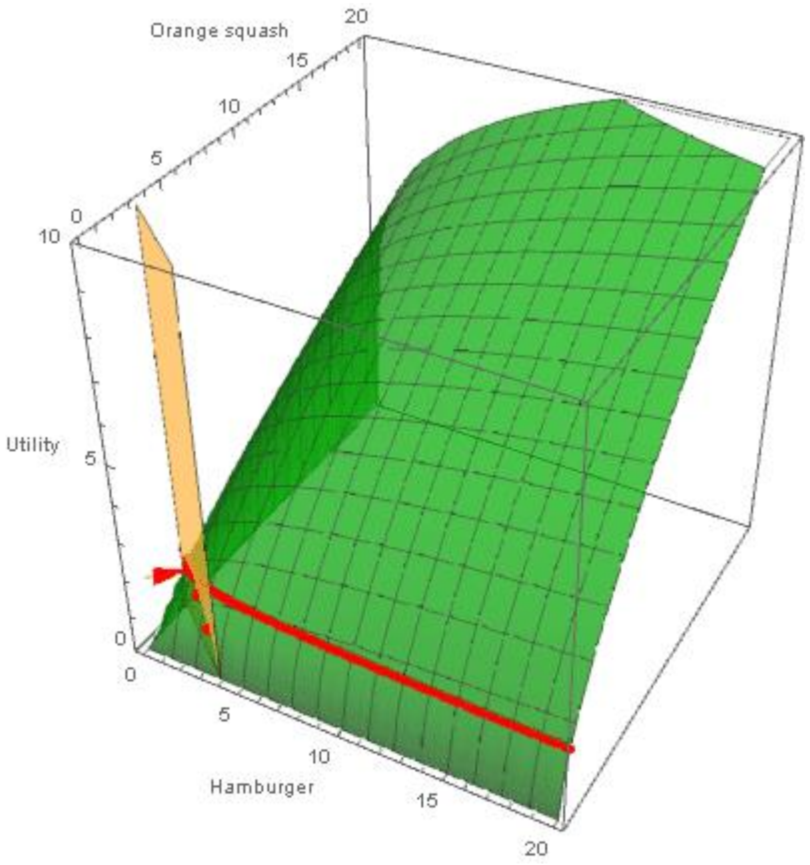
$$140x + 160y = 2900$$

$$y = -\frac{140}{160}x + \frac{2900}{160}$$

The new optimal utility if the budget rises by 1 JPY.

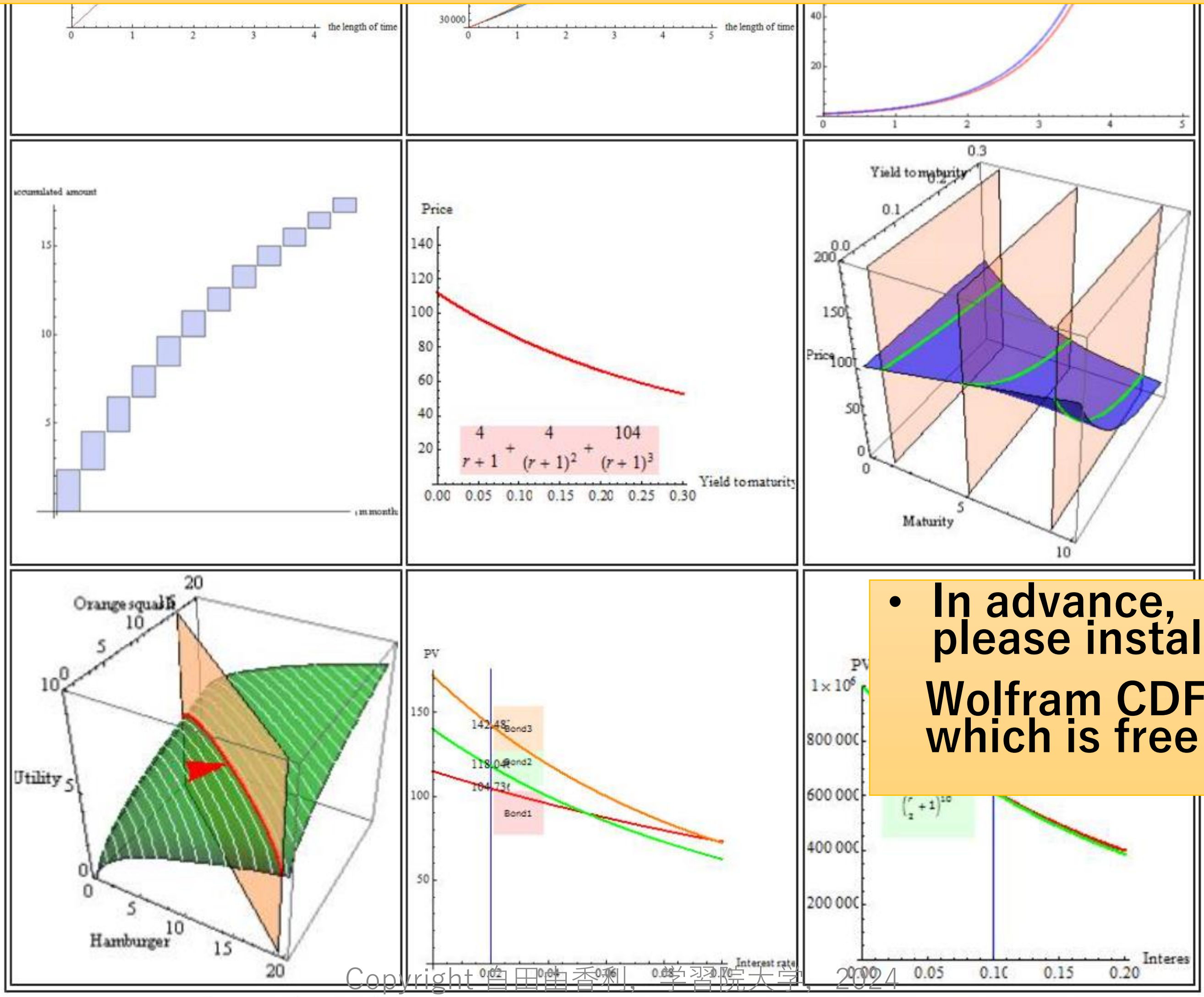
Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

[ビデオ教材：www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2022/VIDEO/lagrange.mp4](www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/2022/VIDEO/lagrange.mp4)



グラフィクス教材

http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/private/MAXIMA/CDF/CDFmaterialENG/ENGsample7.cdf



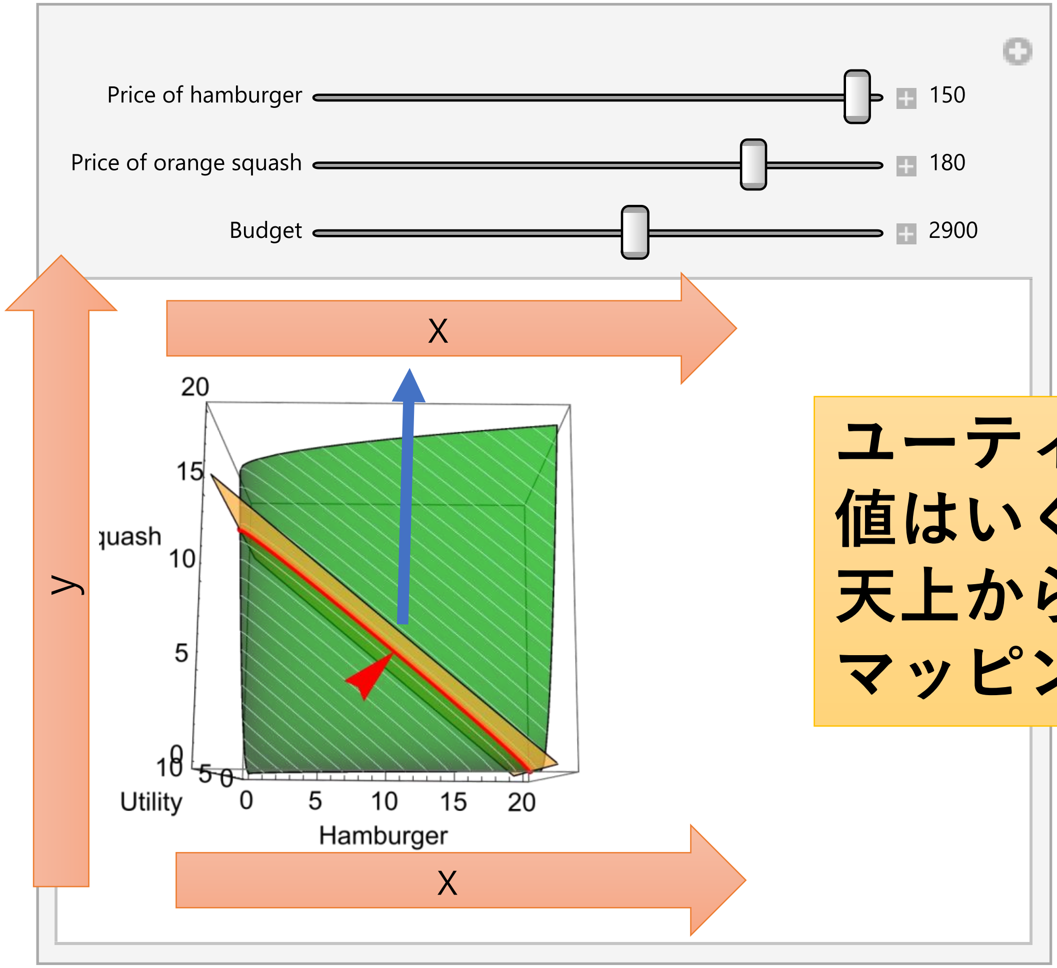
- In advance, please install

  Wolfram CDF player which is free software

Copyright 自田由香利, 学習院大学, 2024

ラグランジュの未定乗数
グラフィクスによる解法

•

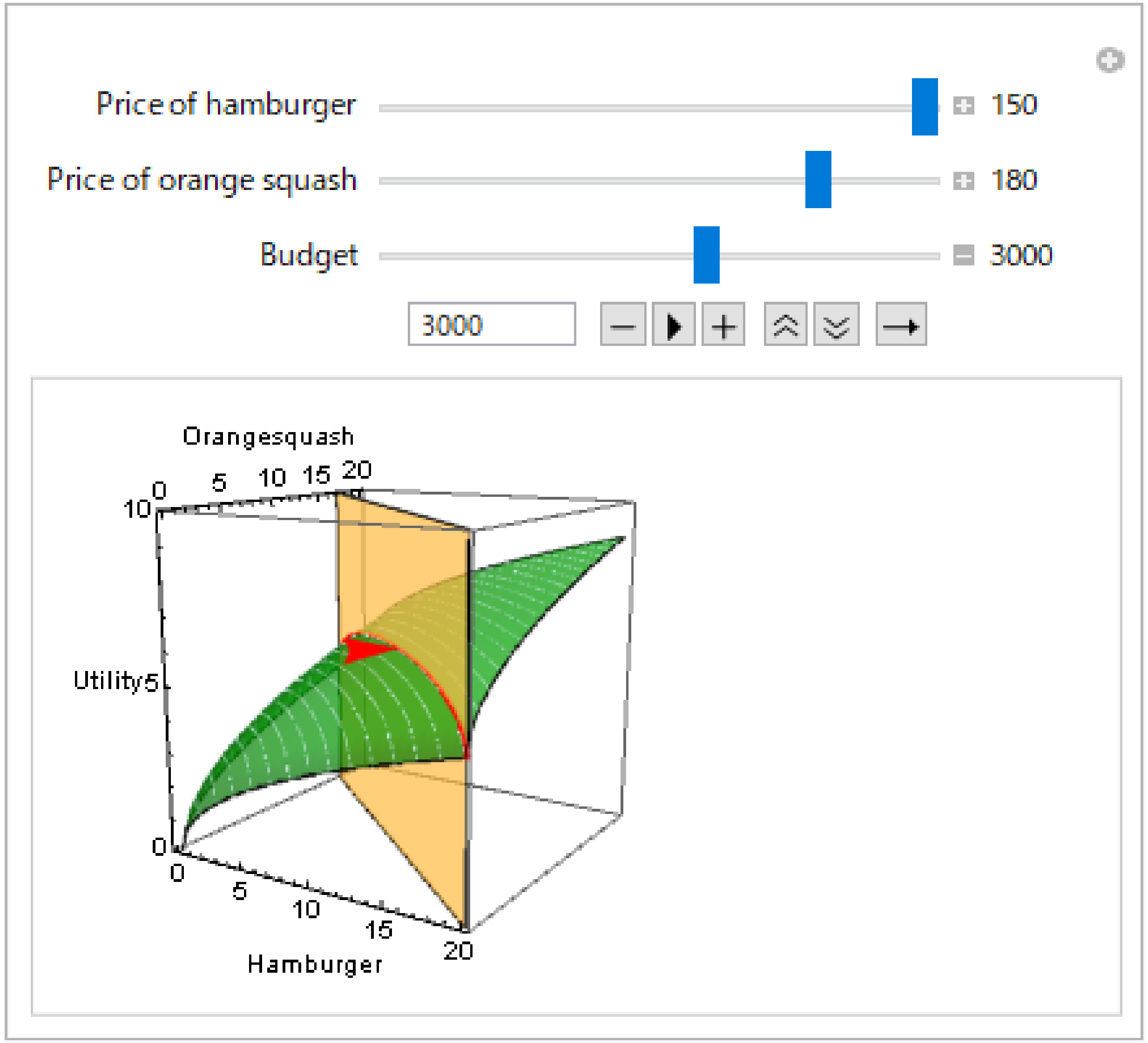


ユーティリティ最大にするｘとｙの値はいくつ？
天上からのぞき込んでx-y平面にマッピング.

ラグランジュ乗数とは何か

- あと制約式の金額Mを１円増やしたら，ユーティリティはどれだけ増えるか

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial M} = \lambda}$$



白田：「悩める学生のための経済・経営数学入門 —3つの解法テクニックで数学アレルギーを克服!」，共立出版
問題１３－１（p．１９６）

ある企業が2種類の財を生産しています。それぞれの生産量をx，yとします。

<u>両方の生産量の合計が72である</u>、という制約下で、費用を最小化する生産量を求めなさい。費用関数は以下の式で与えられるとします。

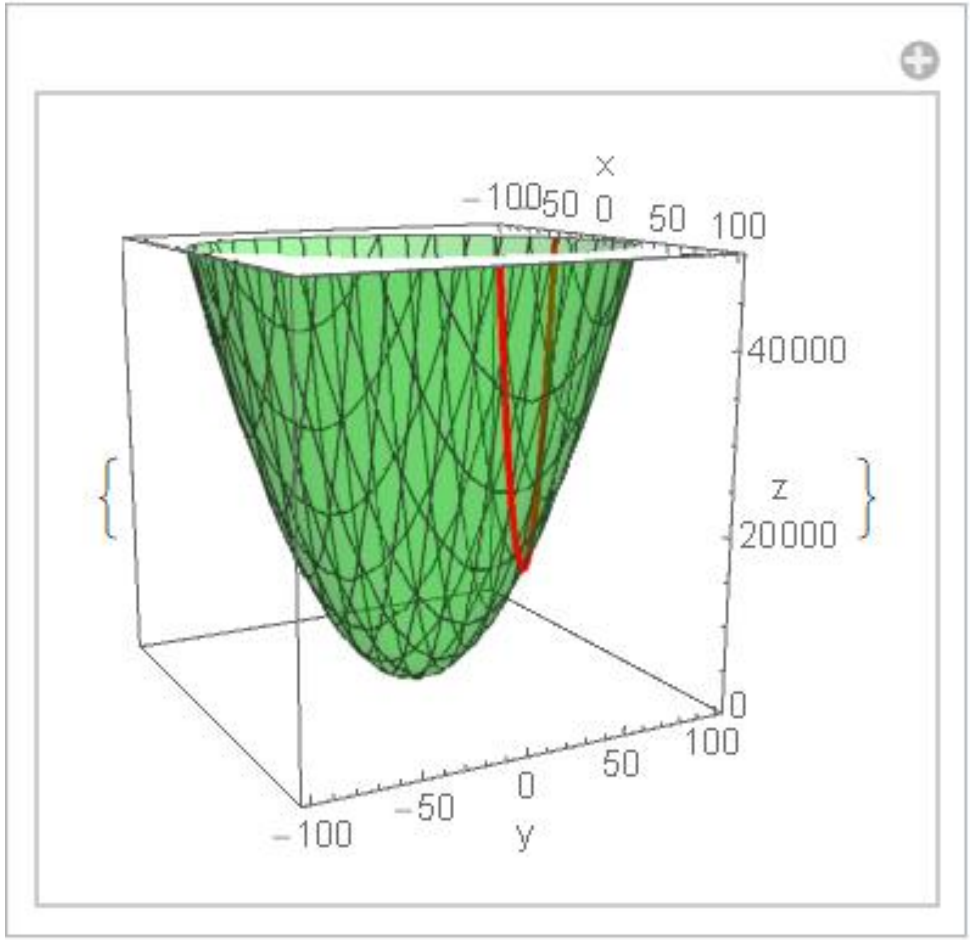
$$C = 12x^2 - 6xy + 6y^2$$

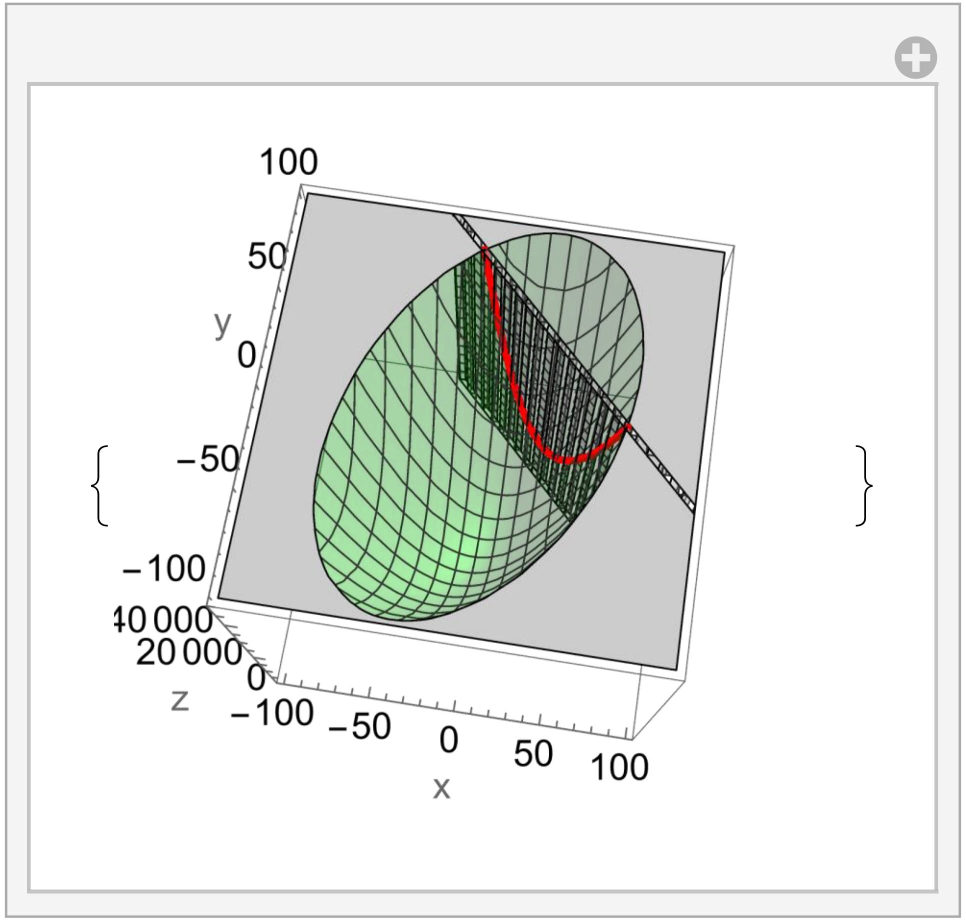
Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

悩める　問題13－1

グラフィクス教材5個が並んでいる

https://shirotaabc.sakura.ne.jp/Nayameru/





制約付き最適化問題
ラグランジュの未定乗数法

生産関数が資本Kと労働Lの2変数関数で、以下のように与えられた。

$$Q(K,L) = 100\ K^{\mathbf{0.3}} \cdot L^{\mathbf{0.7}}$$

$\mathbf{10}K + \mathbf{3}L = \mathbf{100}$という制約のもとで、
Qが最大となる点のKとLの値を求めなさい。

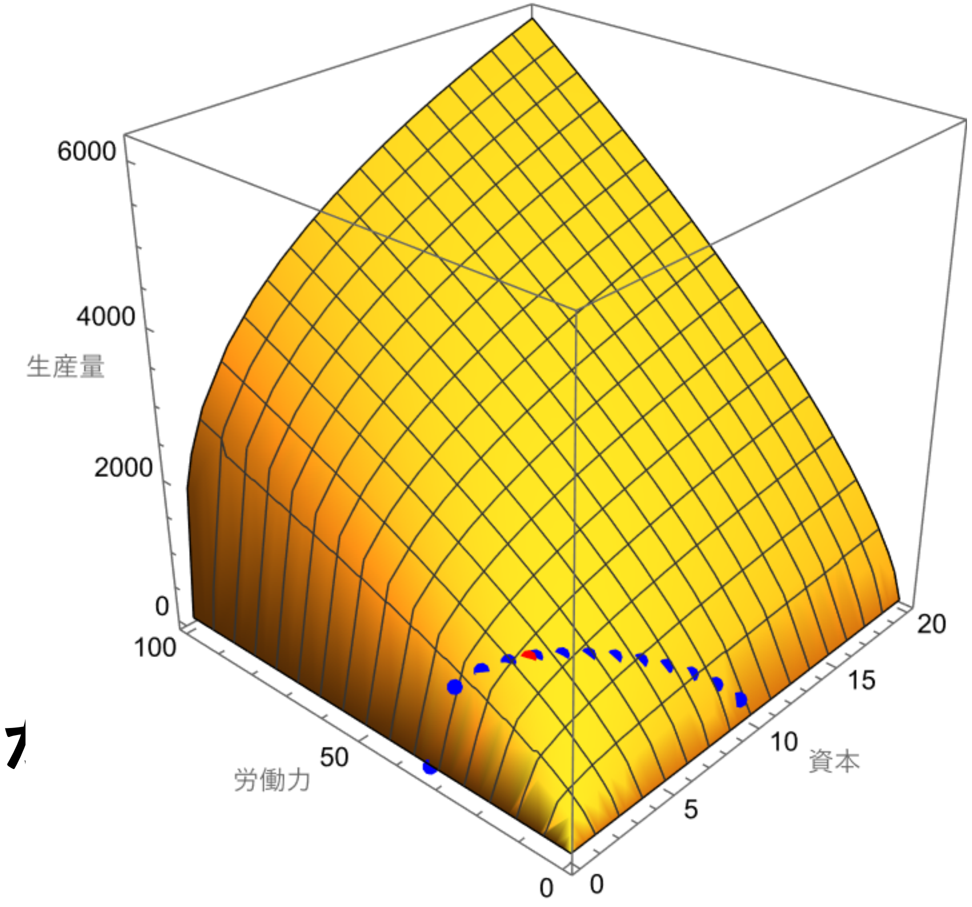
Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

白猫まんじゅう問題の続き ラグランジュの未定乗数法

- コブ・ダグラス型生産関数

$$Q(K,L) = 100K^{0.3}L^{0.7}$$

- 100万使って製造できる最大数
- 機械は1式10万，労働力は一人3万
- 制約式
  10K+3L = 100
- どのように投資配分したら
  100万で最大何個まで製造できるのか

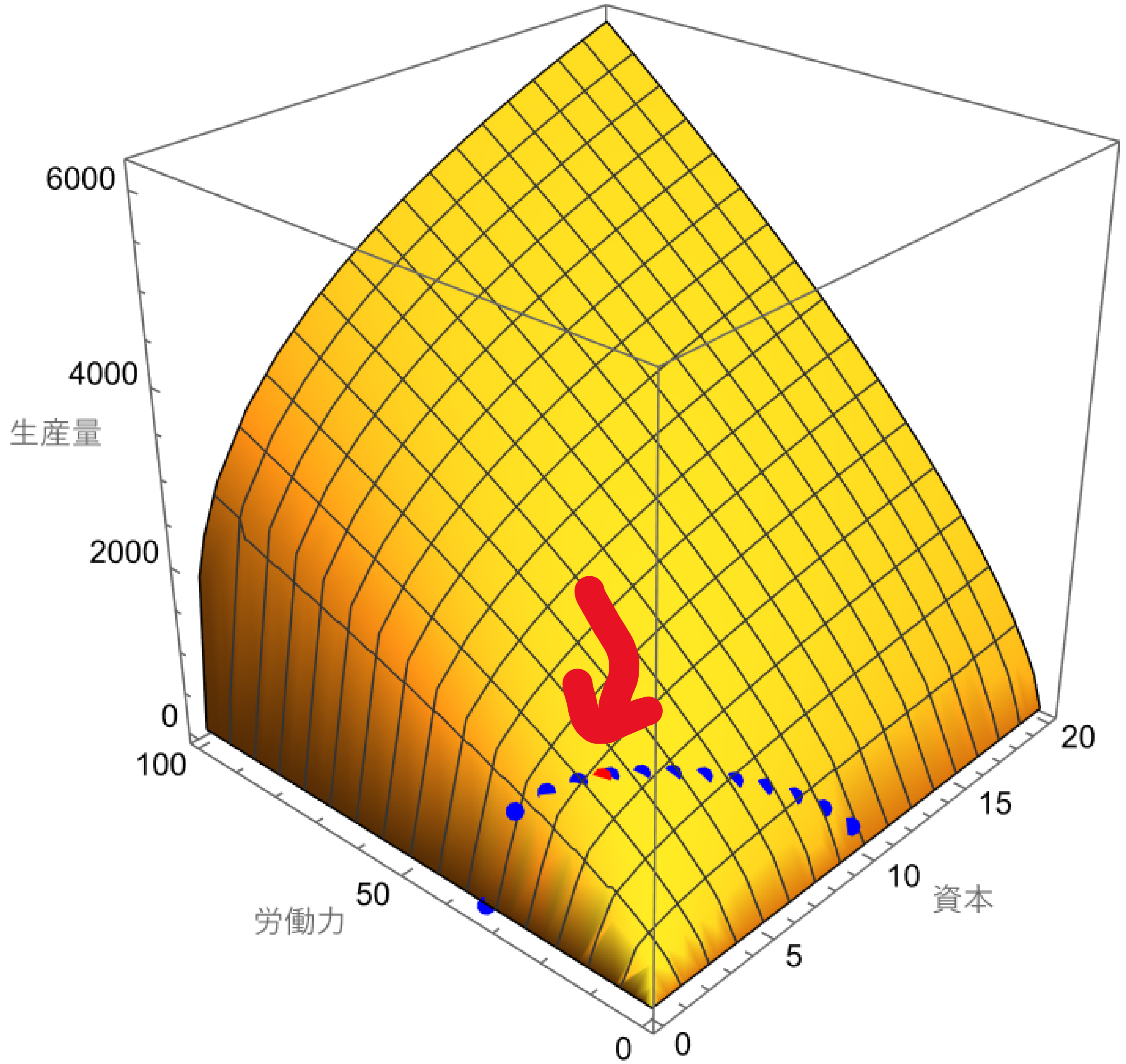


方程式

- $(30.\ L^{0.7})/K^{0.7}-10\ \lambda=0$
- $(70.\ K^{0.3})/L^{0.3}-3\ \lambda=0$
- $10K+3L=100$

- K=3, L=23.3333, λ=12.6101
- 最大生産量　1261個
- その最大値の位置であと1万円投資すると，何個増産できるか？

近似解　12.6個



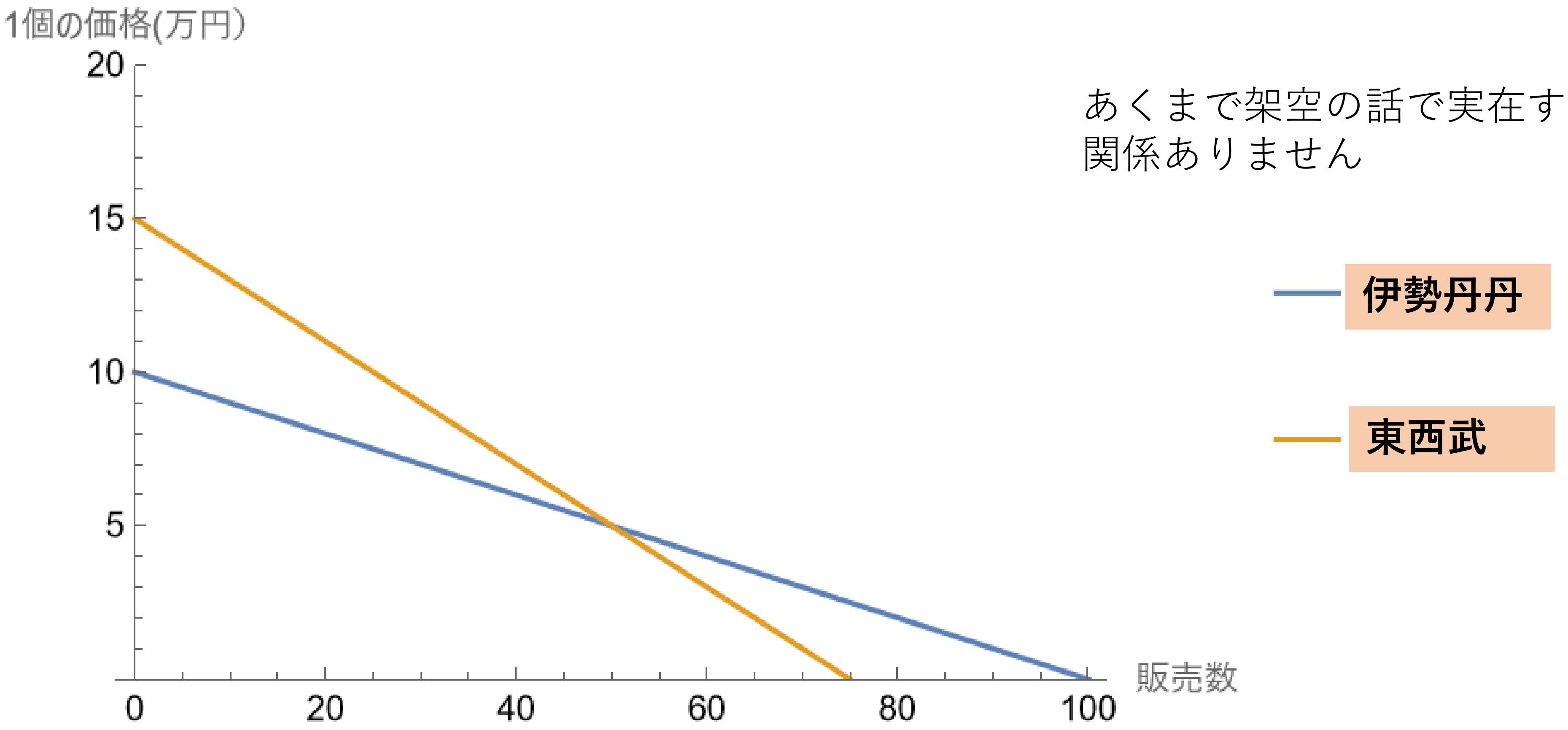
Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

2社に絹スカーフを卸す際の最適バランス
収入の最大化
（ラグランジュの未定乗数法）

2社に絹スカーフを卸す際の最適バランス（ラグランジュの未定乗数法）

- 希少価値の緑絹のスカーフ　月に100個しか生産できない
- デパート2社に卸している
- ２社で異なる価格ディスカウント方式を採用

大量に買ってくれる程，安く売る仕組み

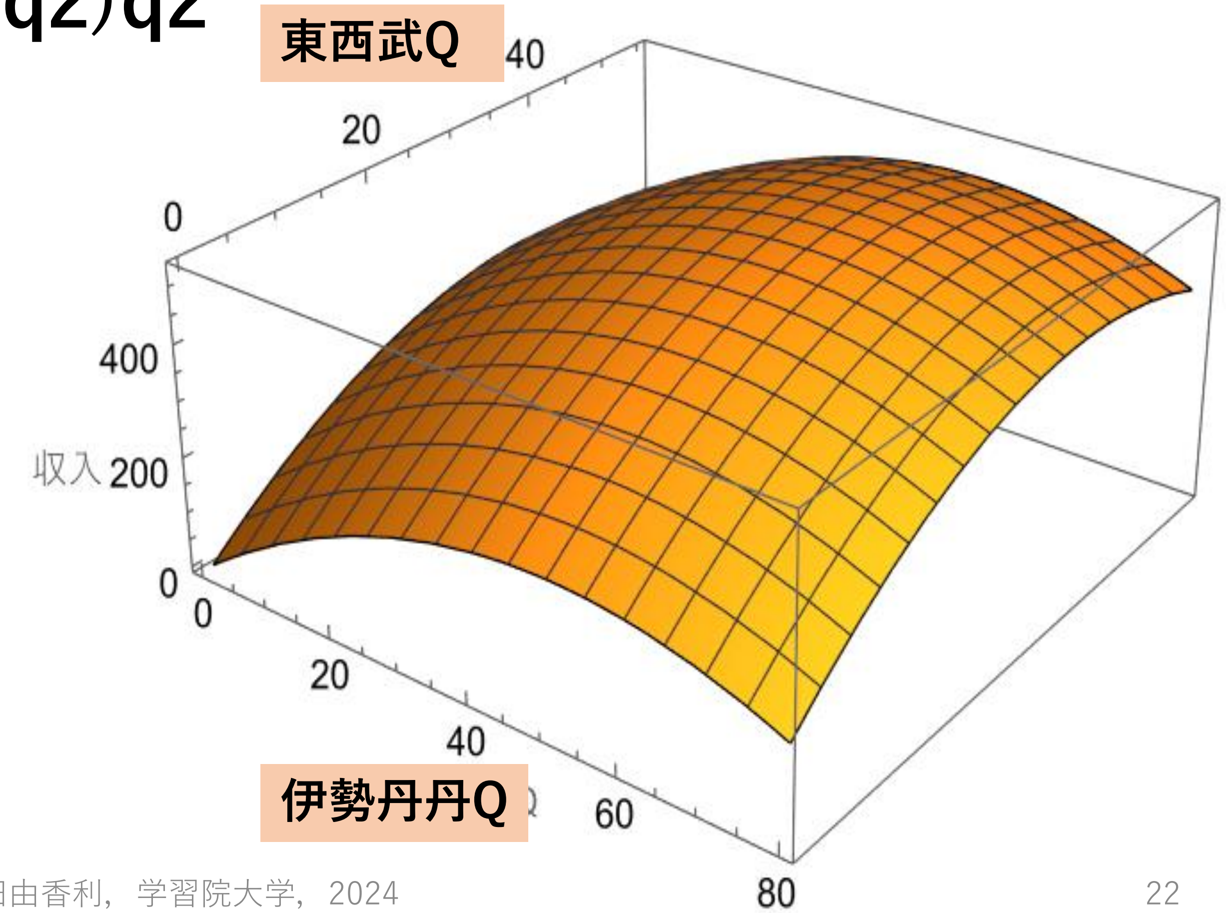


あくまで架空の話で実在する会社とは関係ありません

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

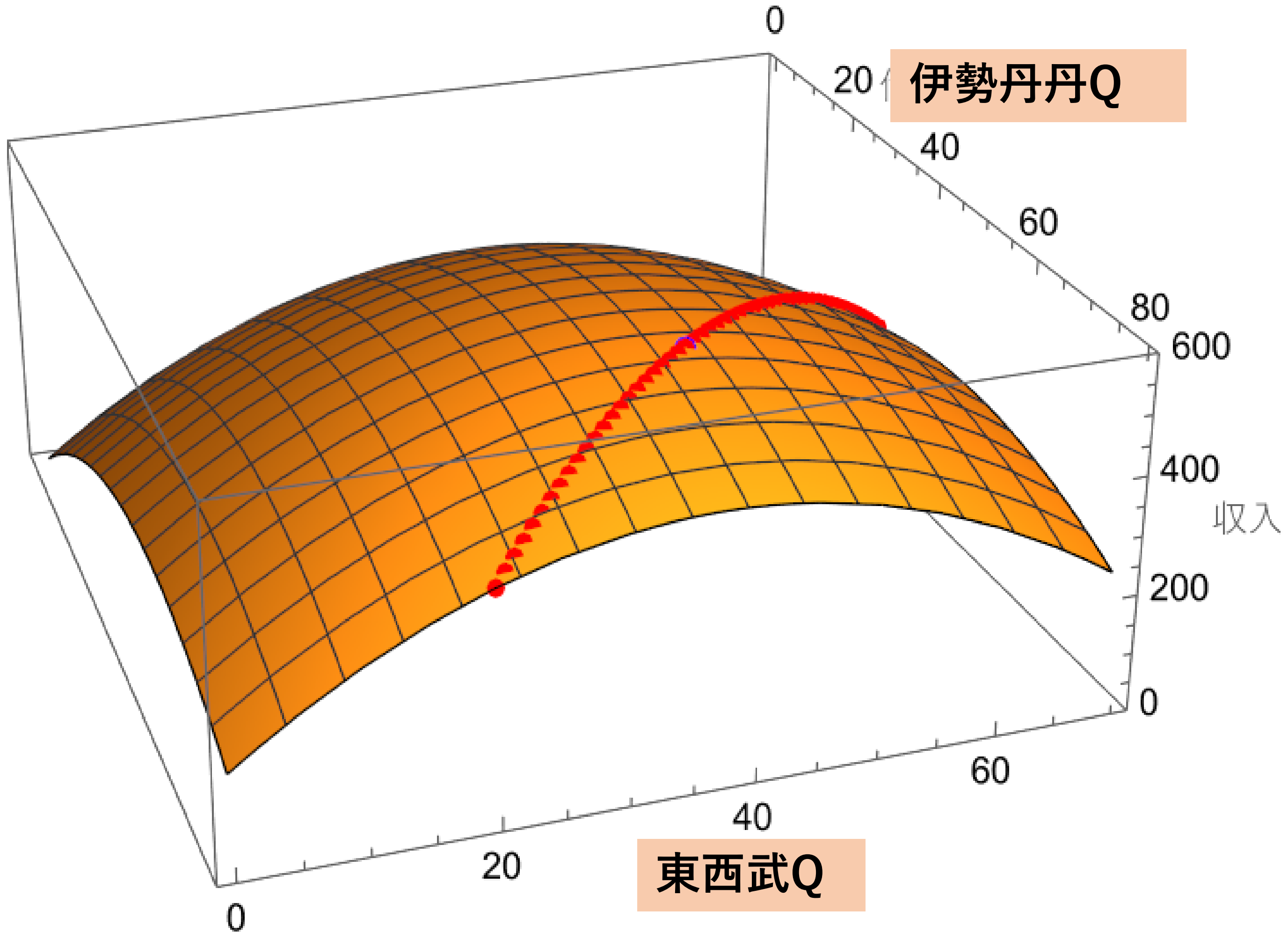
財2種の場合 収入$M = p1 \times q1 + p2 \times q2$

- M＝p1×q1+p2×q2
  ＝(10-0.1 q1)q1+(15-0.2 q2)q2



合計100個の配分は無数にある 収入最大点はどこか

- 厳密解はラグランジュ未定乗数法で



100個卸す場合の最適バランス ラグランジュの未定乗数法

- $\boldsymbol{M = p1 \times q1 + p2 \times q2}$
  =(10-0.1*q1) q1 + (15 -0.2*q2) q2
- 合計個数 $q1 + q2 = 100$
- $\boldsymbol{F(q1, q2, \lambda) = M(q1, q2) + \lambda(100 - (q1 + q2))}$
  - $\mathbf{10 - \lambda - 0.2\, q1 = 0}$
  - $\mathbf{15 - \lambda - 0.4\, q2 = 0}$
  - $\boldsymbol{q1 + q2 = 100}$

連立方程式の解 q1=58.3, q2=41.7, λ =-1.67

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

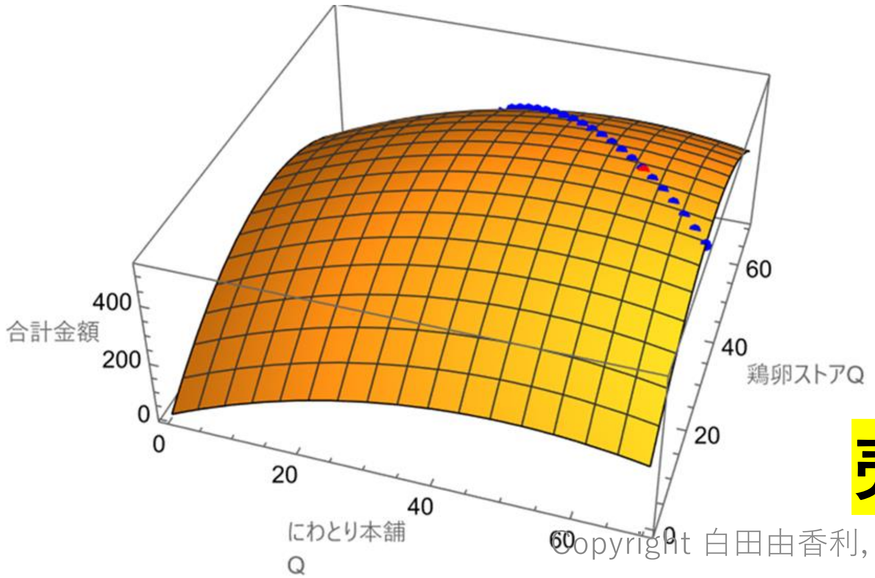
100個買う場合の最適バランス ラグランジュの未定乗数法

方程式

- 10-λ-0.2 q1 = 0
- 15-λ-0.4 q2 = 0
- q1 + q2 = 100

解答

- qq1=58.3333,
- qq2=41.6667,
- λ = -1.66667



- 最大値のとき
  卸す個数をあと1個増やすと
  収入が約1.67円安くなる

売惜しみしたほうが収入が大きい

Copyright 白田由香利，学習院大学，2024

制約付き最適化問題ではなく、普通の極大値問題で解く

$f(x,y)=10\ x-0.1\ x^2+15\ y-0.2\ y^2$

収入531.25, {x -> 50., y -> 37.5}}