正規分布で需要予測
確率分布の活用法

2024年2月22日

学習院大学経済学部経営学科　教授

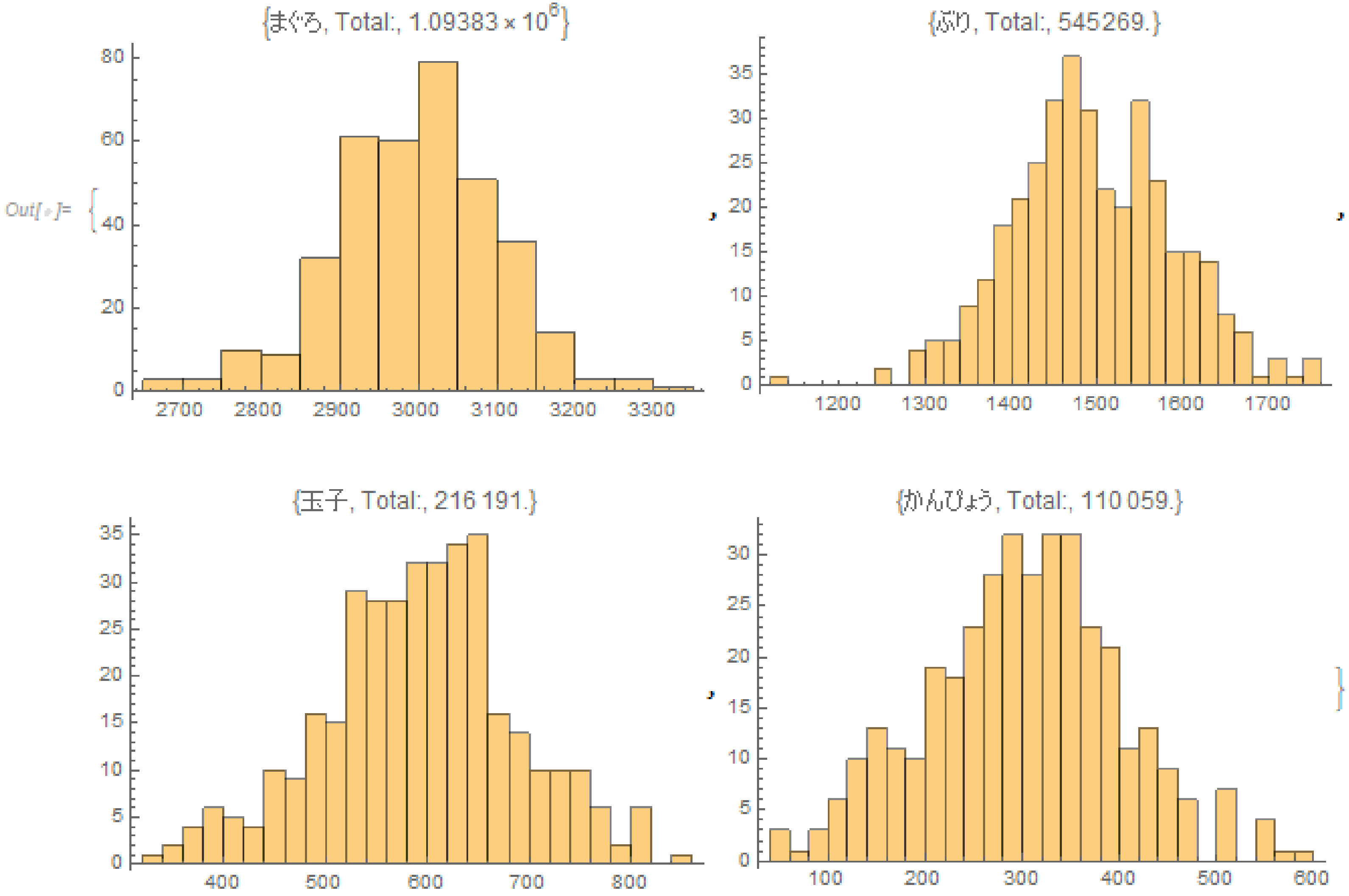
白田　由香利

回転ずし
売上はどのくらいか（価格と平均値）

- 回転すし「白熊すし」
- まぐろ，ぶり，玉子，かんぴょう巻き
- 全部１００円

３６５日の各ネタの売上個数と総売り上げ個数

•

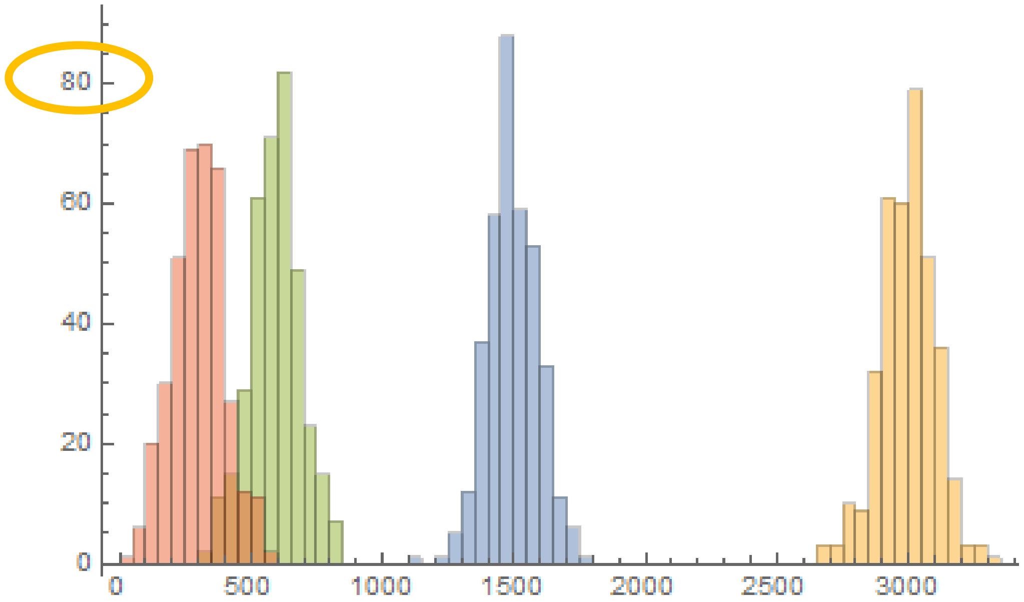


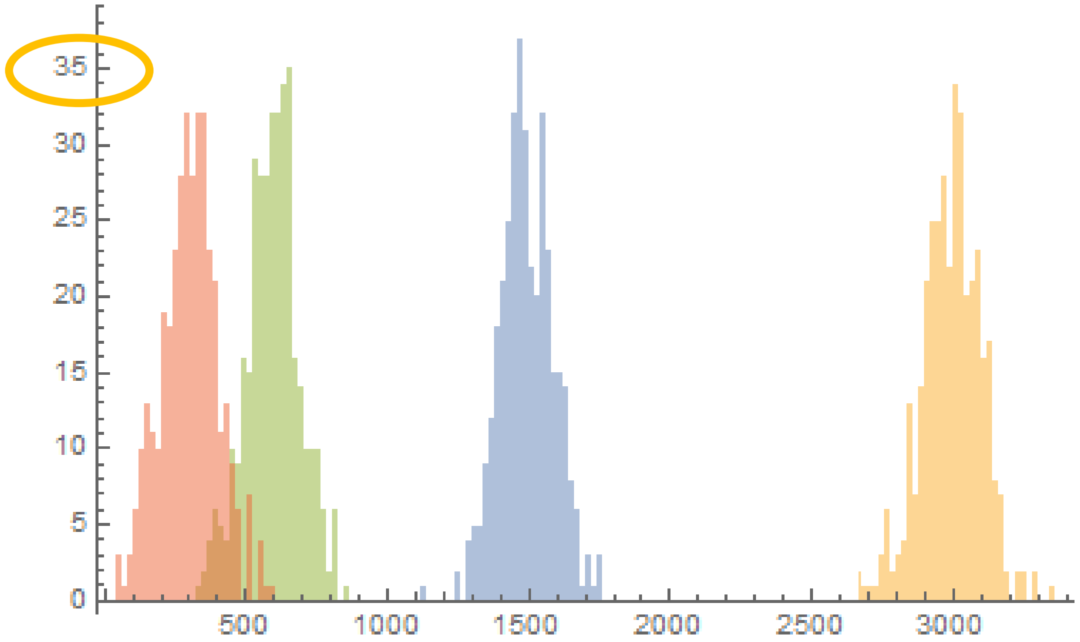
1日の売上の分散が大きいと,
予測が立てにくい

- 予測がはずれると
  - 売れ残りでFOOD LOSS
  - 品切れで，売れた機会の逃した
- 需要予測は重要

ヒストグラムの幅を半分にすると，頻度もほぼ半分になる

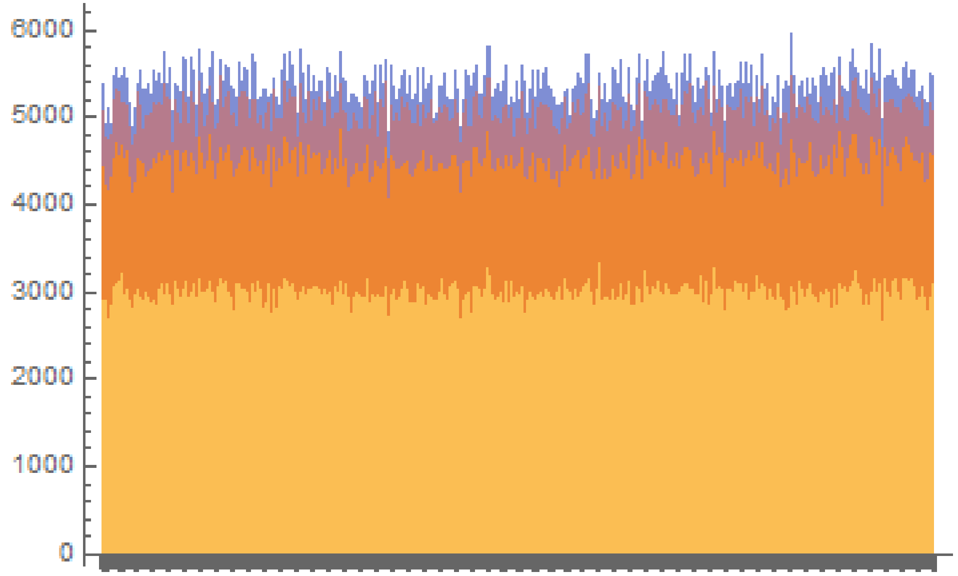
- 横軸は1日の売上数，縦軸は頻度

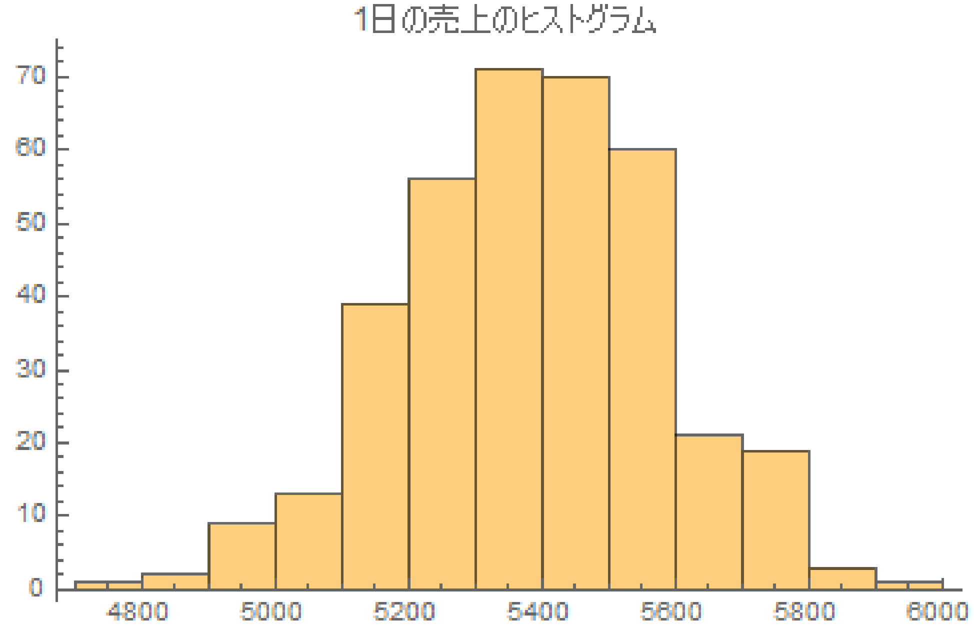




３６５日の各ネタの売上個数と総売り上げ個数

- 横軸は日次，縦軸は1日の売上個数



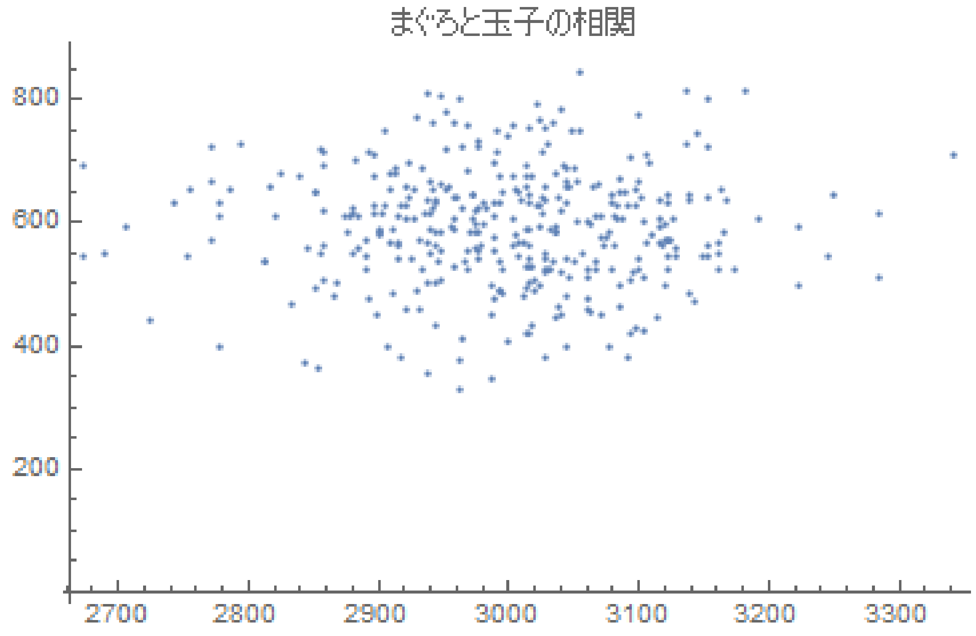


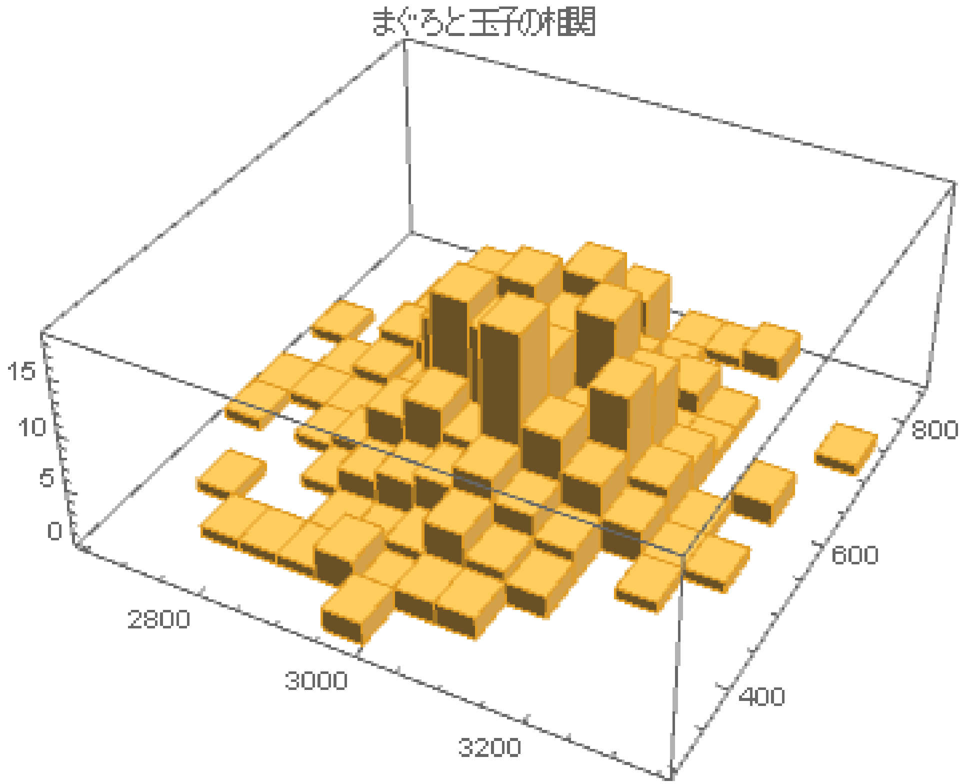
平均　　5384.53
標準偏差　196.412

まぐろと玉子の相関

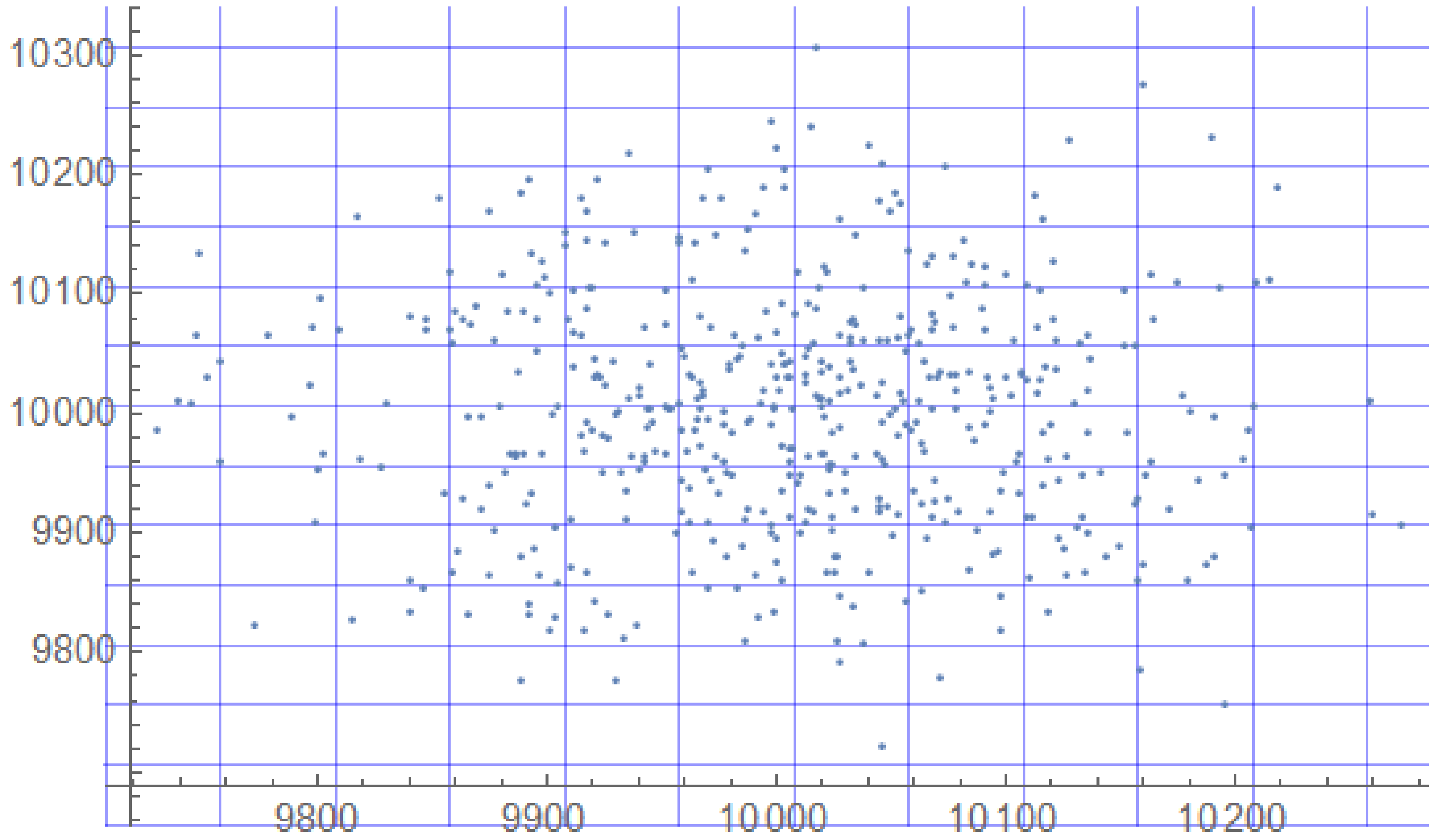
- 1点が1日の売上を示す

３Dでヒストグラムにした
点が密集しているところの頻度が大きい





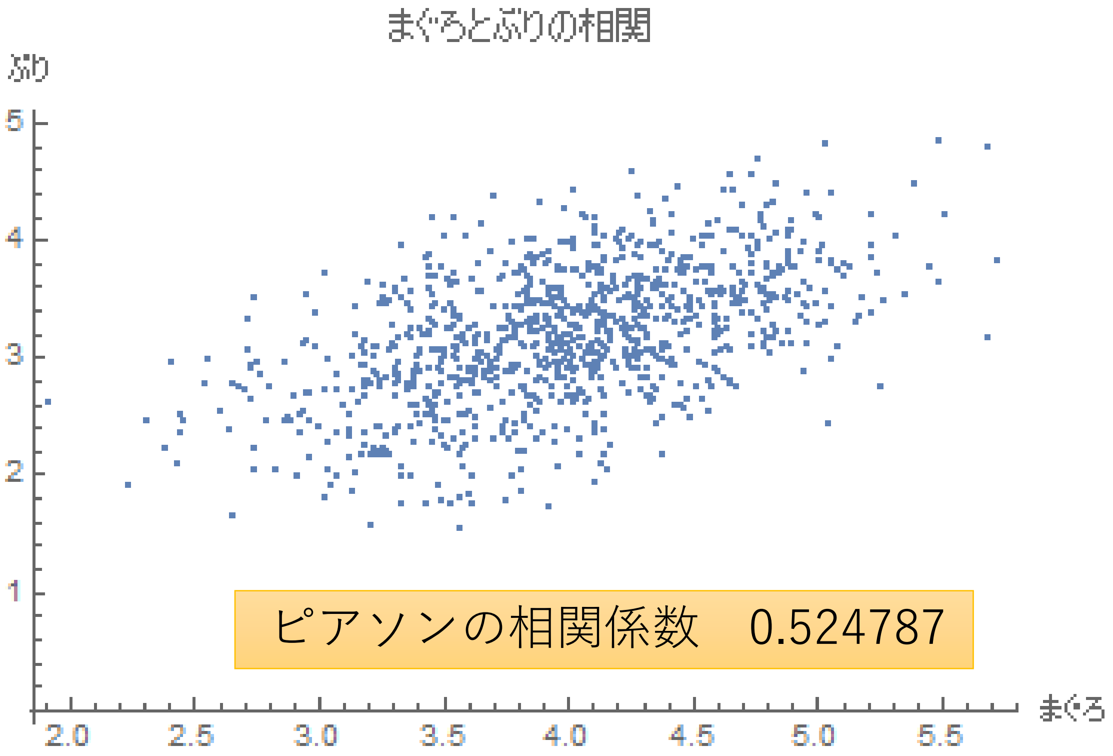
3次元ヒストグラムは，１セルの中のデータ数分だけ積み上げる

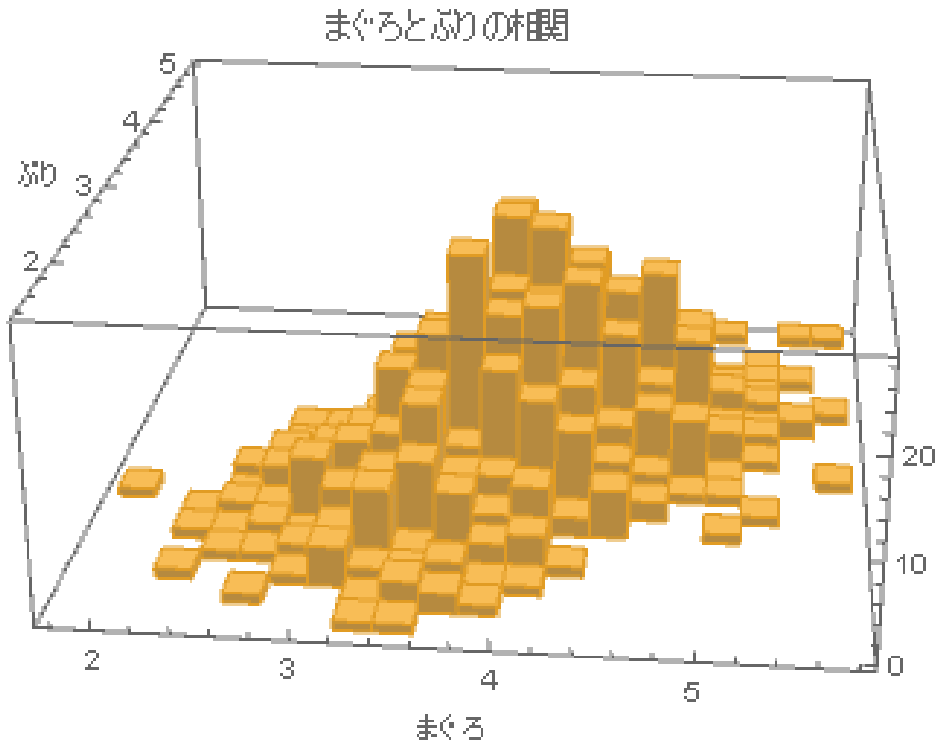


１年間に渡り，一人の人が1来店で平均何個注文したか記録をとってネタ間の相関を分析

- 1点が一人のデータ

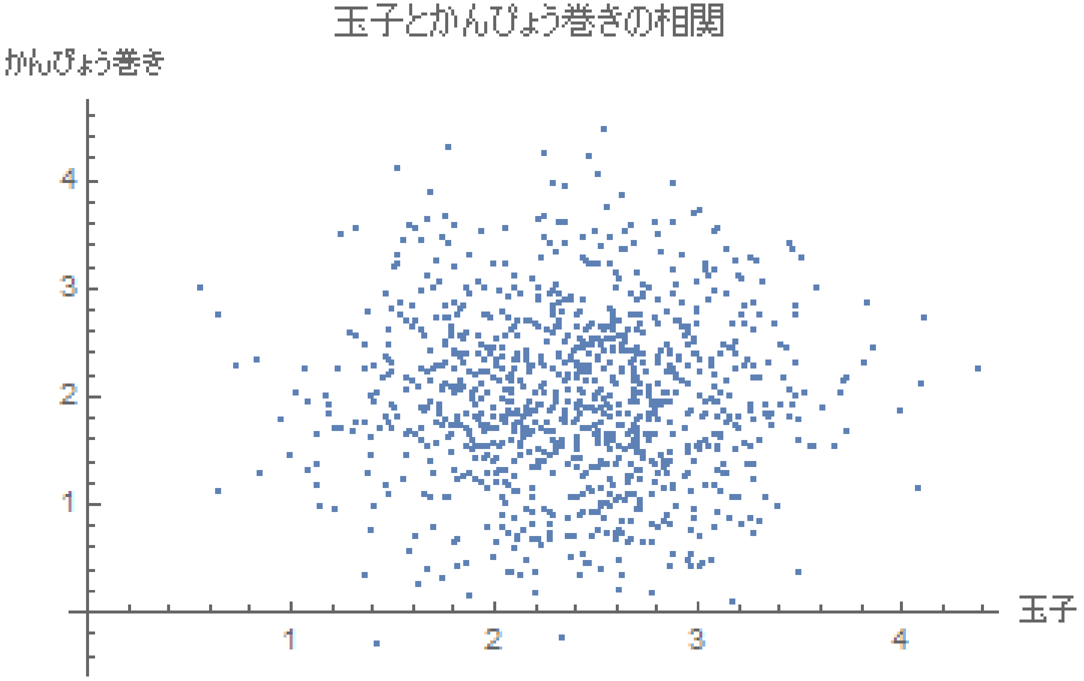
３Dヒストグラム





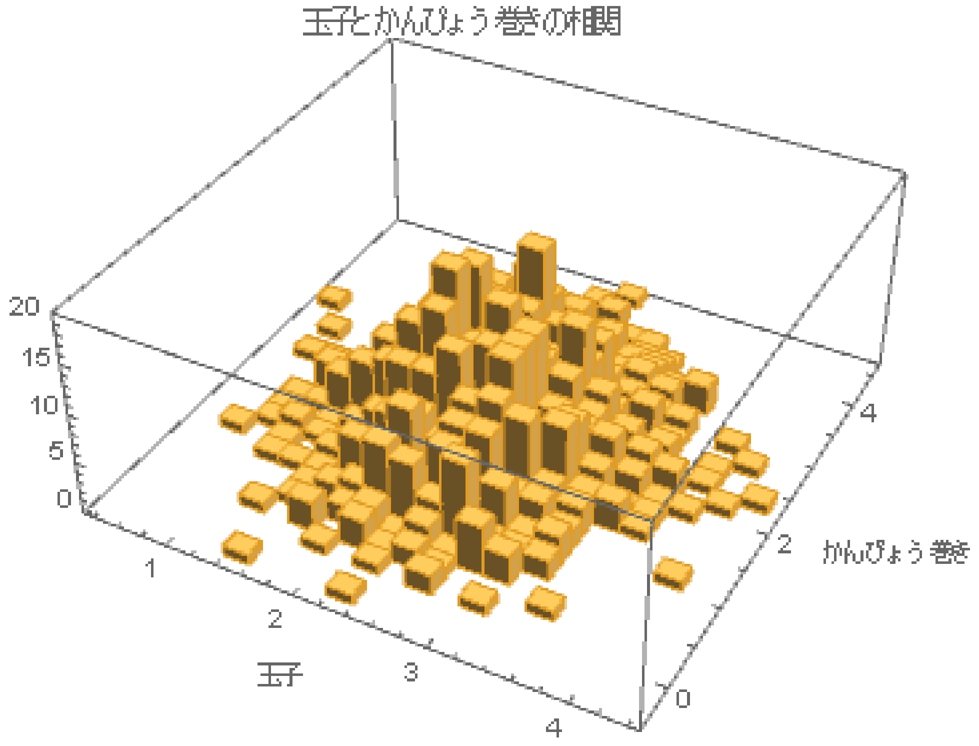
１年間に渡り，一人の人が平均何個注文したか記録をとって，ネタ間の相関を分析

- 1点が一人のデータ



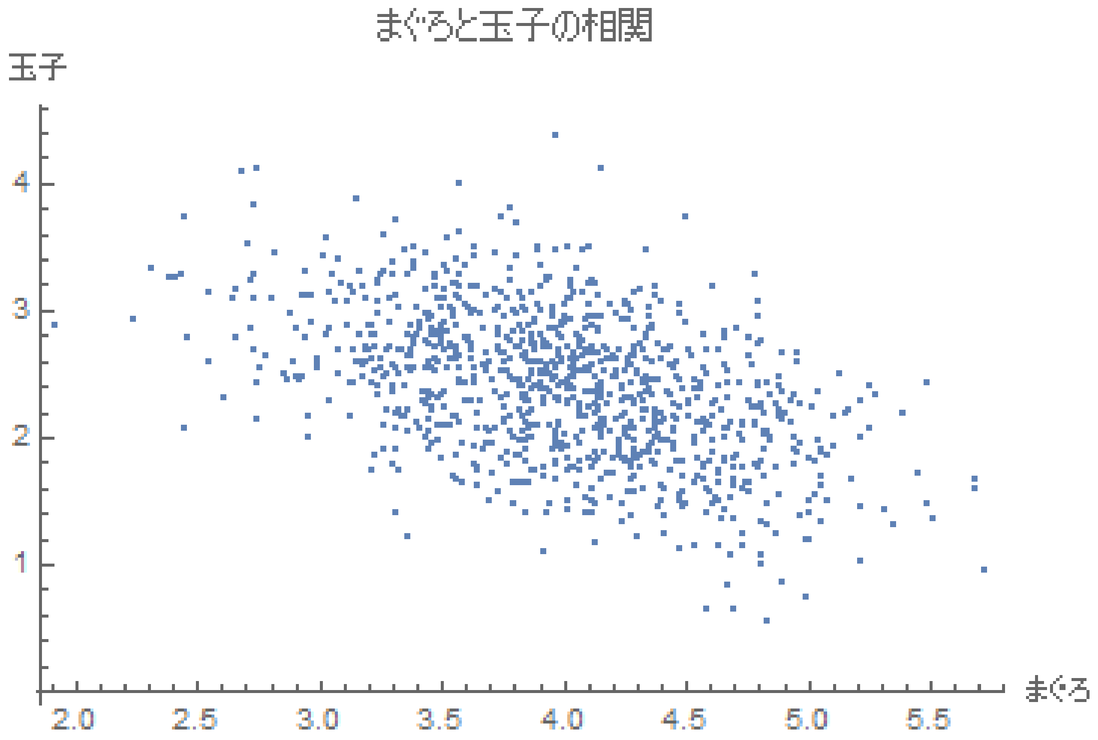
ピアソンの相関係数　−0.0102004

３Dヒストグラム



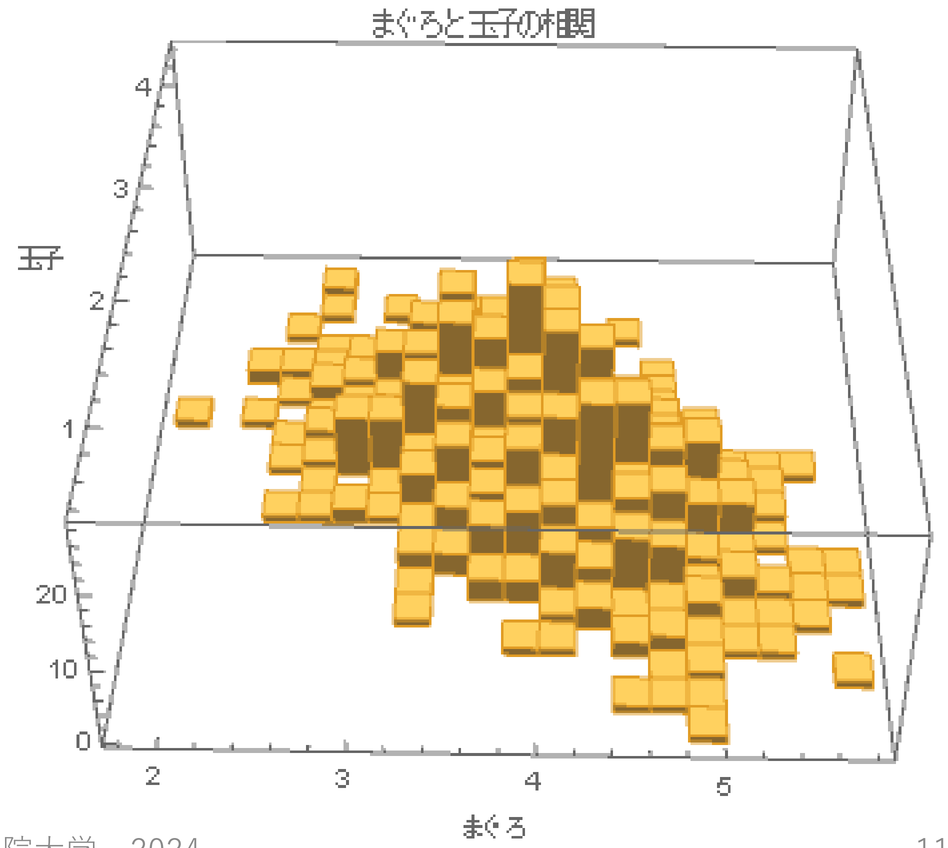
１年間に渡り，一人の人が平均何個注文したか記録をとって，ネタ間の相関を分析

- 1点が一人のデータ



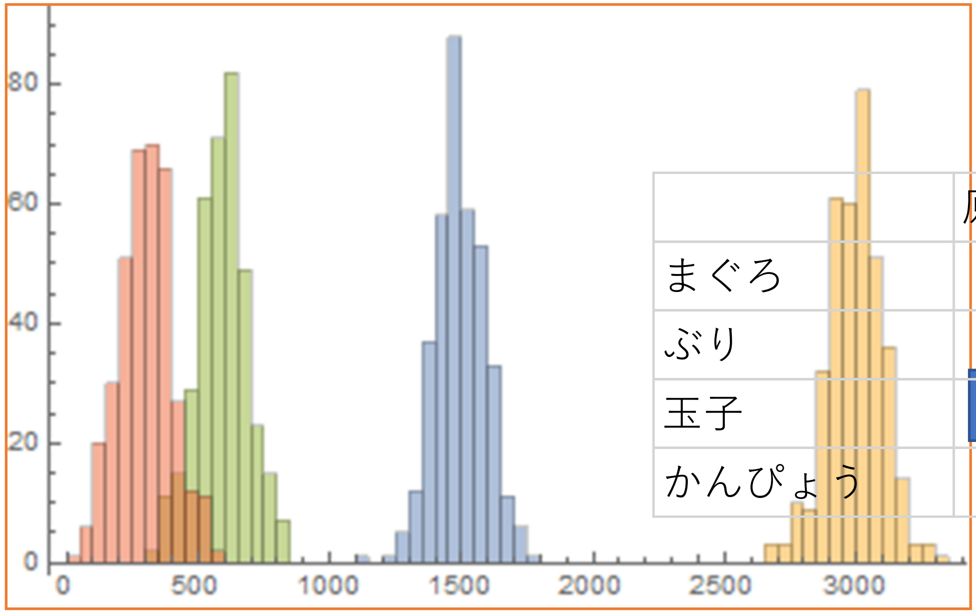
ピアソンの相関係数　−0.48364

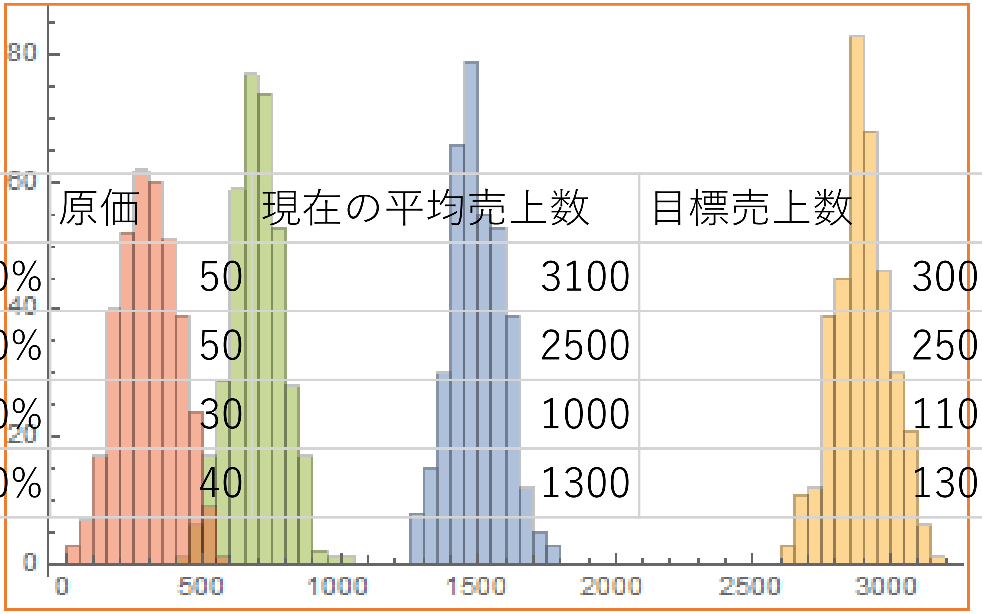
３Dヒストグラム



原価率がネタで異なる場合，原価率の低い玉子を好む子供を呼び込むためにはどうすればよいか，を考えるのが経営者

- 1日あたり100個のまぐろを玉子に変えさせることができると以下のような変化がおきる．総売上数は変わらないとする．





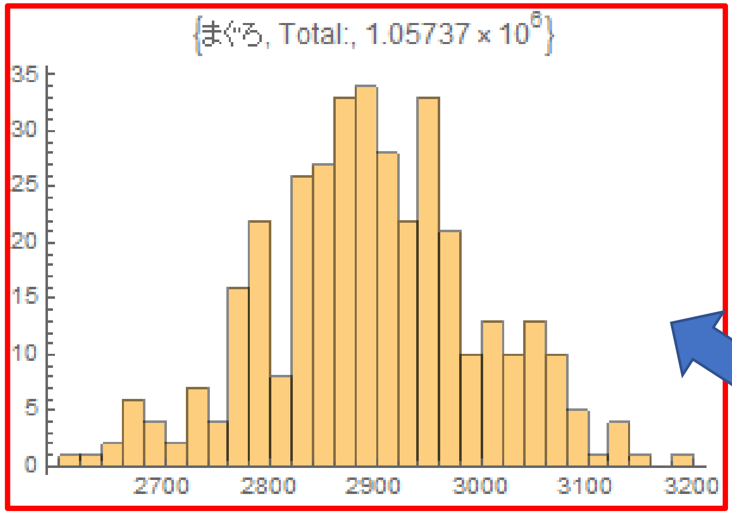
	原価率	原価	現在の平均売上数	目標売上数
まぐろ	50%	50	3100	3000
ぶり	50%	50	2500	2500
玉子	30%	30	1000	1100
かんぴょう	40%	40	1300	1300

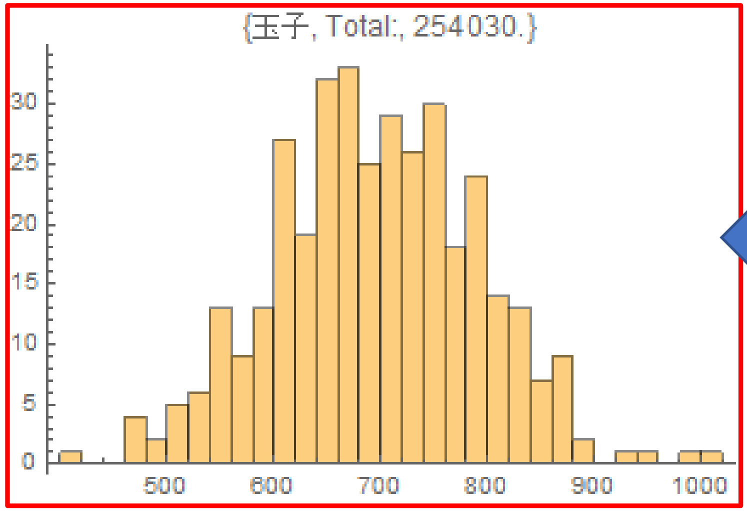
原価率

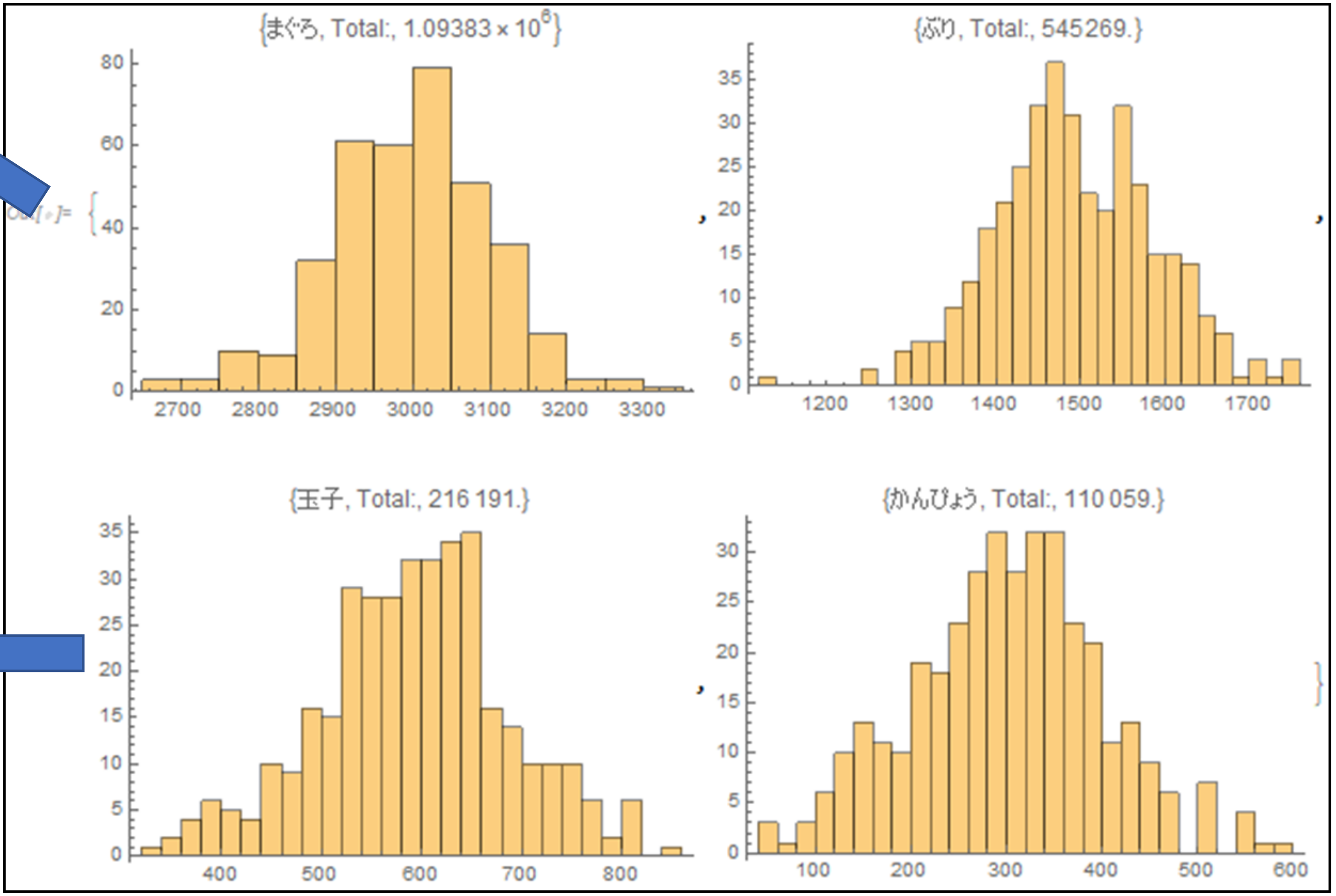
•

	原価率	原価	現在の平均売上数	目標売上数
まぐろ	50%	50	3100	3000
ぶり	50%	50	2500	2500
玉子	30%	30	1000	1100
かんぴょう	40%	40	1300	1300

1日あたり100個のまぐろを玉子に変えさせることができると以下のような変化がおきる．総売上数は変わらないとする．







問題：原価率は以下のようになっている．
同じ100円を稼ぐのに，まぐろとぶりが一番原価がかかる．現在の売上平均が以下の場合，まぐろの100個を玉子の100個に移せた場合，総原価がどれだけ減少するか計算せよ

	原価率	原価	現在の平均売上数	目標売上数
まぐろ	50%	50	3100	3000
ぶり	50%	50	2500	2500
玉子	30%	30	1000	1100
かんぴょう	40%	40	1300	1300

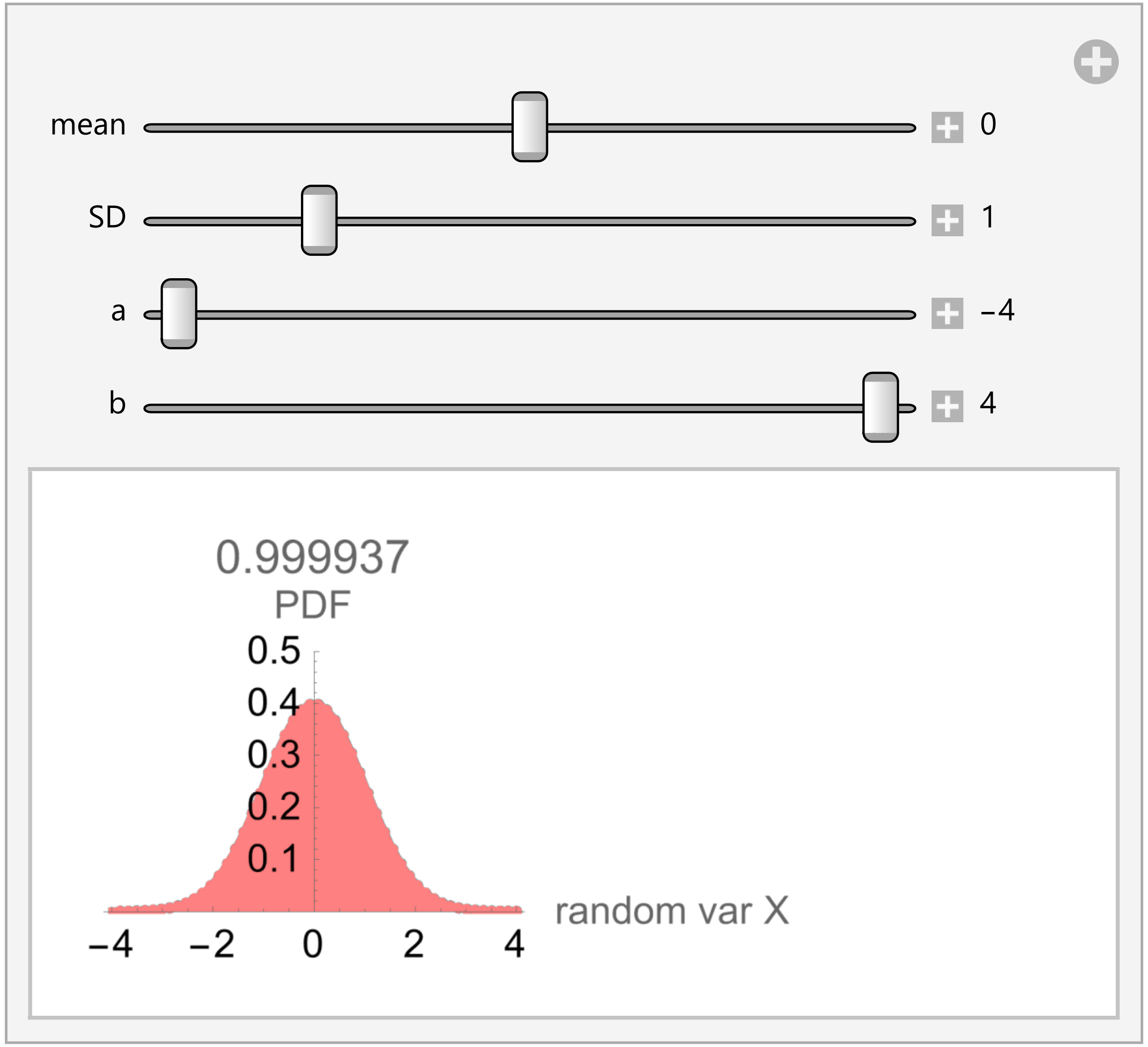
これが問題の解答

	原価率	原価	現在の平均売上数	目標売上数	現在の平均売上数	目標売上数
まぐろ	50%	50	3100	3000	155000	150000
ぶり	50%	50	2500	2500	125000	125000
玉子	30%	30	1000	1100	30000	33000
かんぴょう	40%	40	1300	1300	52000	52000
					362000	360000
					2000円総原価を削減できた	

経営者として，確率分布で目標設定

- 現状を確率分布で記述し，把握
- 目標の確率分布をどうしたいか設定
- 分散はリスクであり，上下動のレベル
  - 過剰生産でフードロス
  - 過少生産で販売機会損失
- 分散が大きいと，利益が少なくなる

正規分布



白田　グラフィクス教材サイト Wolfram CDF playerで動きます

- https://shirotaabc.sakura.ne.jp/usefulMath/ABC/

shirotaabc.sakura.ne.jp/usefulMath/ABC/

Gmail マップ https://g-port.univ.gaku... G-Port - Google 検索 学習院大学ポータルサイト... マイプロフィール - Zoom » その他のブックマーク

- 2個ともビーフバーガーが当たる確率 ビデオで見る グラフィクス教材

確率モデルと統計的推測

- 正規分布における１σ，２σ，３σ ビデオで見る グラフィクス教材
- 正規分布の標準化 N(50,3)-> N(0,1) ビデオで見る グラフィクス教材
- 合格者10%にするための合格最低ライン ビデオで見る グラフィクス教材
- 標本平均の分布　中心極限定理 ビデオで見る グラフィクス教材
- 標本サイズで標準偏差をコントロール ビデオで見る グラフィクス教材
- スプレーガンで区間推定を説明 ビデオで見る グラフィクス教材

べキ乗則

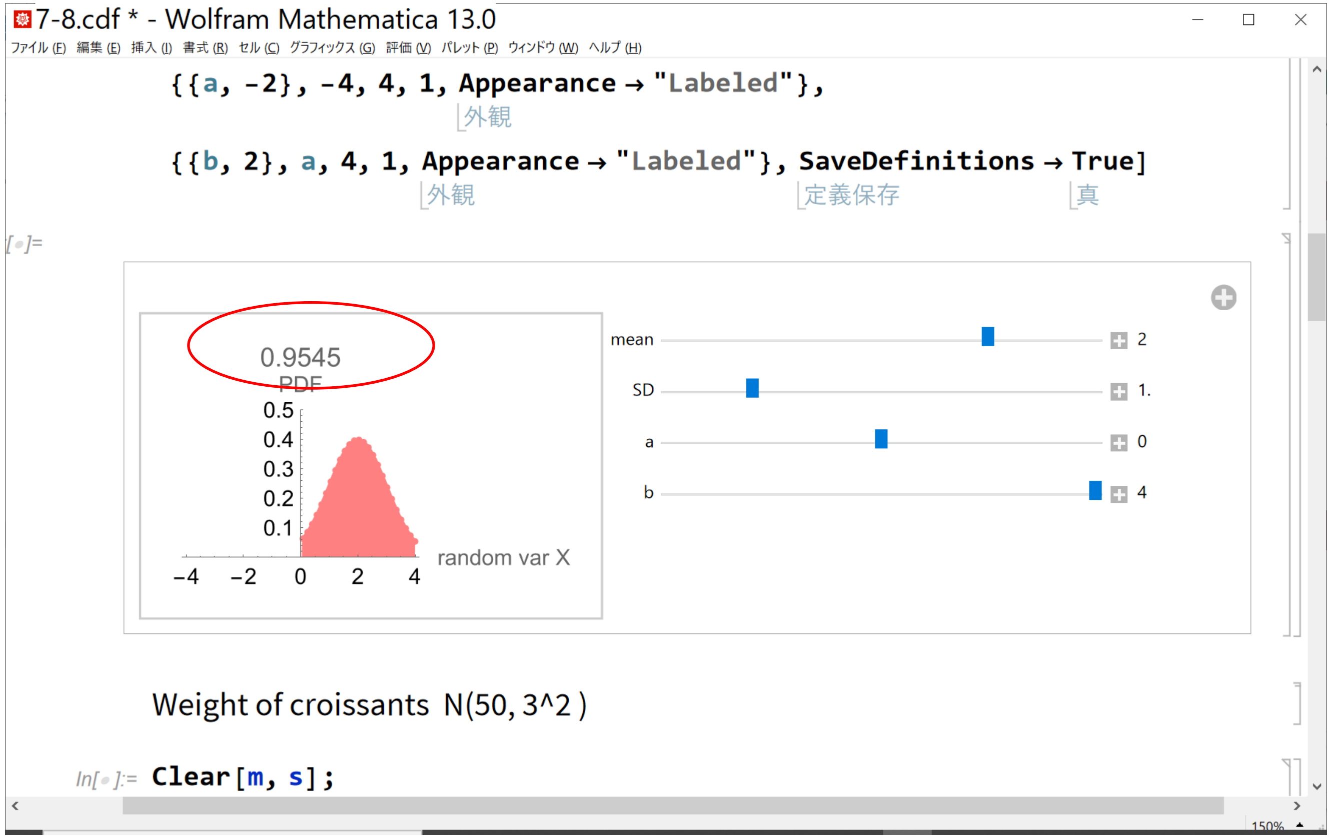
- 中学で学んだ反比例の関数はべキ乗 ビデオで見る グラフィクス教材
- べキ乗をまとめてグラフで見る ビデオで見る グラフィクス教材
- 指数関数との違いは両対数グラフで描いてみれば分かる ビデオで見る グラフィクス教材
- べキ乗におけるスケールの不変性とは ビデオで見る グラフィクス教材

女性の人生の15のストーリーを数式で見る

- 積立貯金 ビデオで見る グラフィクス教材
- 学資保険と定期預金を比較 ビデオで見る グラフィクス教材

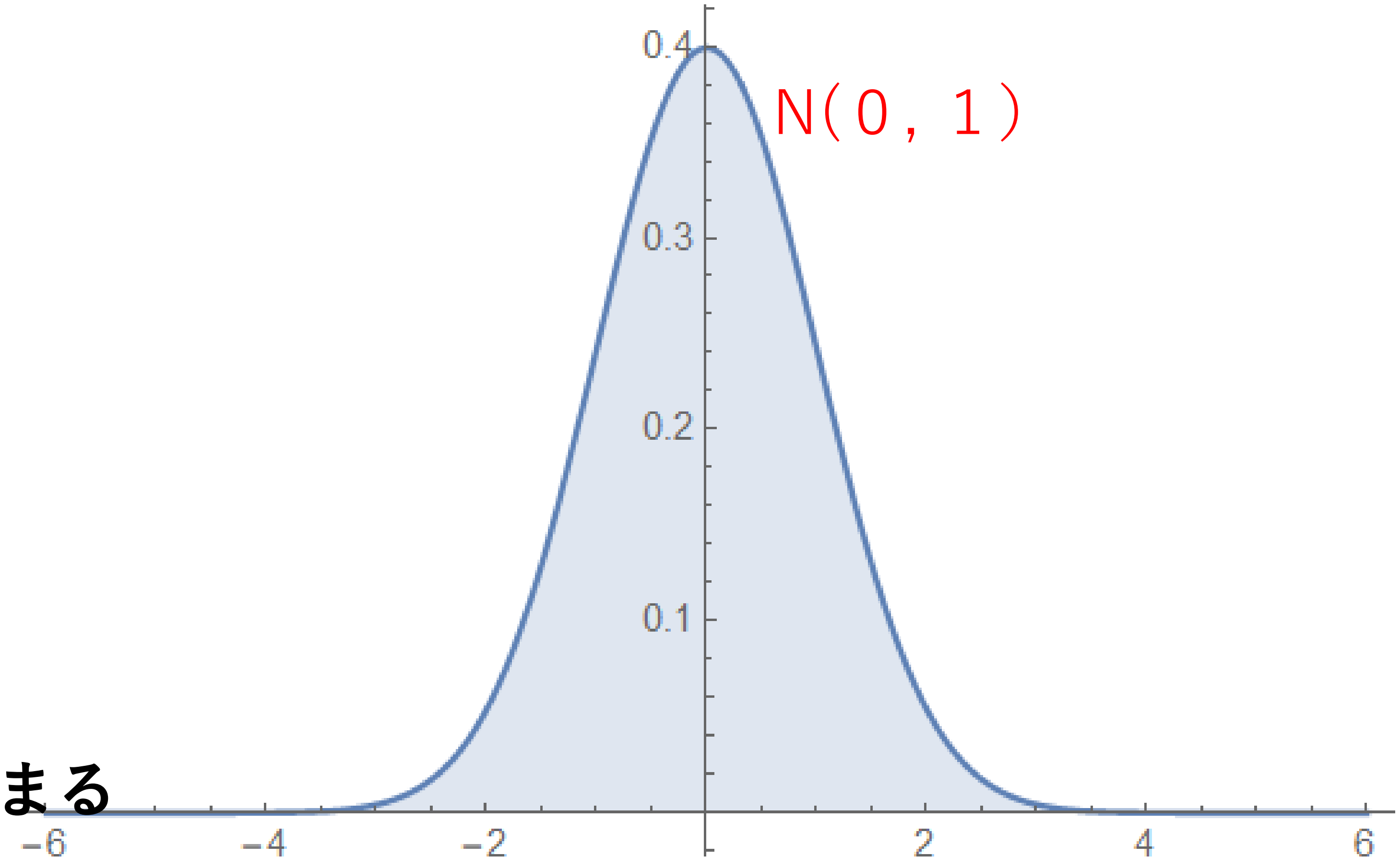
課題
正規分布の確率密度関数　N(2, 1)

- 次ページのグラフィクス教材を動かす（大学のPCで動きます）
- N(2, 1）において，確率変数Xが0から４の範囲にはいる確率をグラフィクスから求めよ．小数点以下4桁
- WORDに右図を張り付けて，PDFに変換して**PDFを提出**せよ．
- 氏名，学籍番号を必ず書くこと．



正規分布の確率密度関数　N(μ, σ^2)

$$\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}$$



- μ　平均
- σ^2　分散

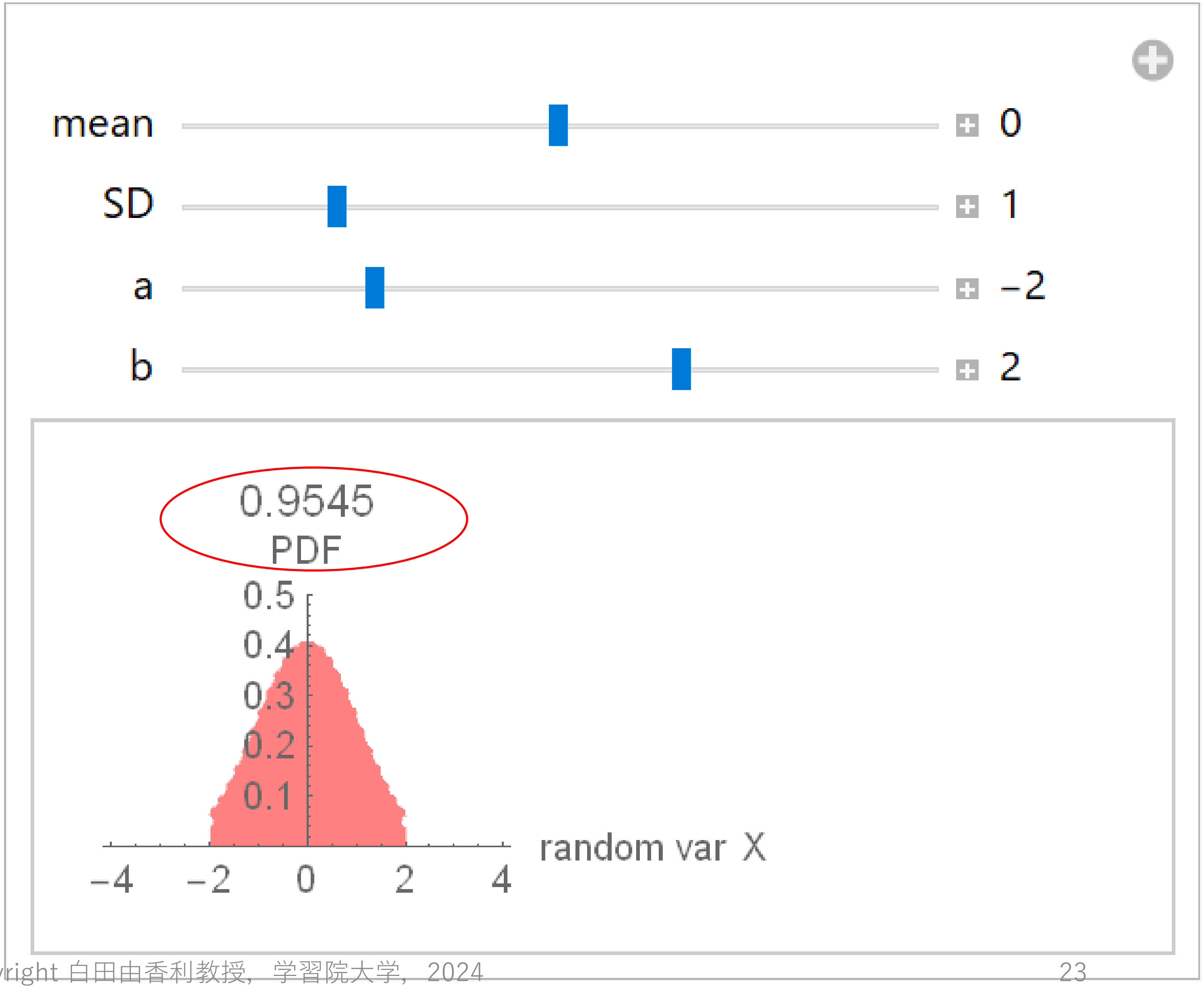
この２つを決めると形状がきまる

- X軸は確率変数

  例：コアラのマーチの重さ（60ｇと言っているのに少ない，多い）

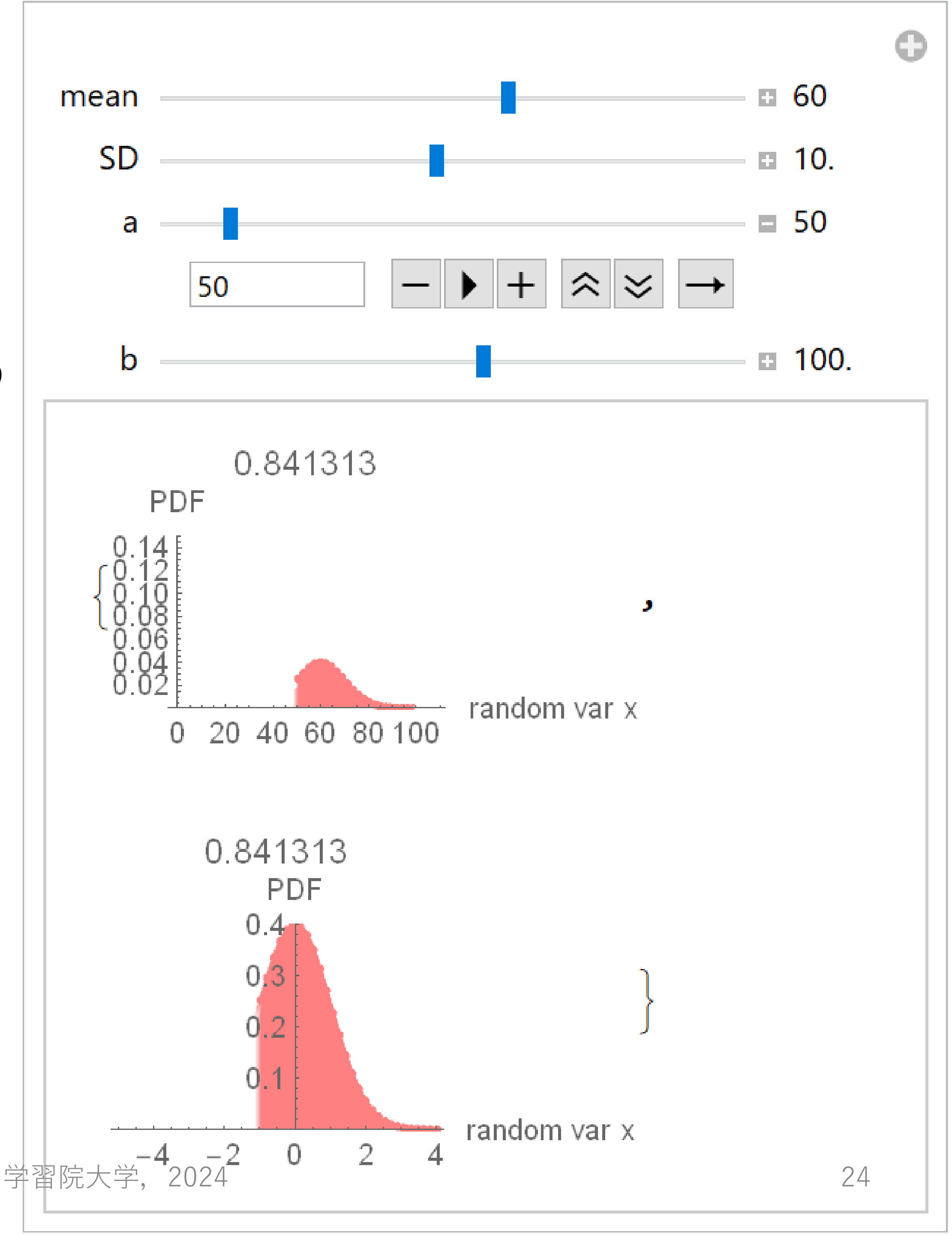
面積が確率

- 標準偏差　SD
  standard deviation
  分散のルートとったもの
- 確率密度分布：
  面積全体はいつも１
- 確率は１より大きくなることはない.
- 確率密度分布は
  ヒストグラムとは違う
- Ｙ軸：確率密度
- ヒストグラムのＹ軸は度数



正規分布の標準化

- 平均を引いて，標準偏差σで割る
- N(60, 100) における
  50は、平均から何σ分
  ずれているか？
- $\dfrac{50-\mu}{\sigma} = \dfrac{50-60}{10} = -1$

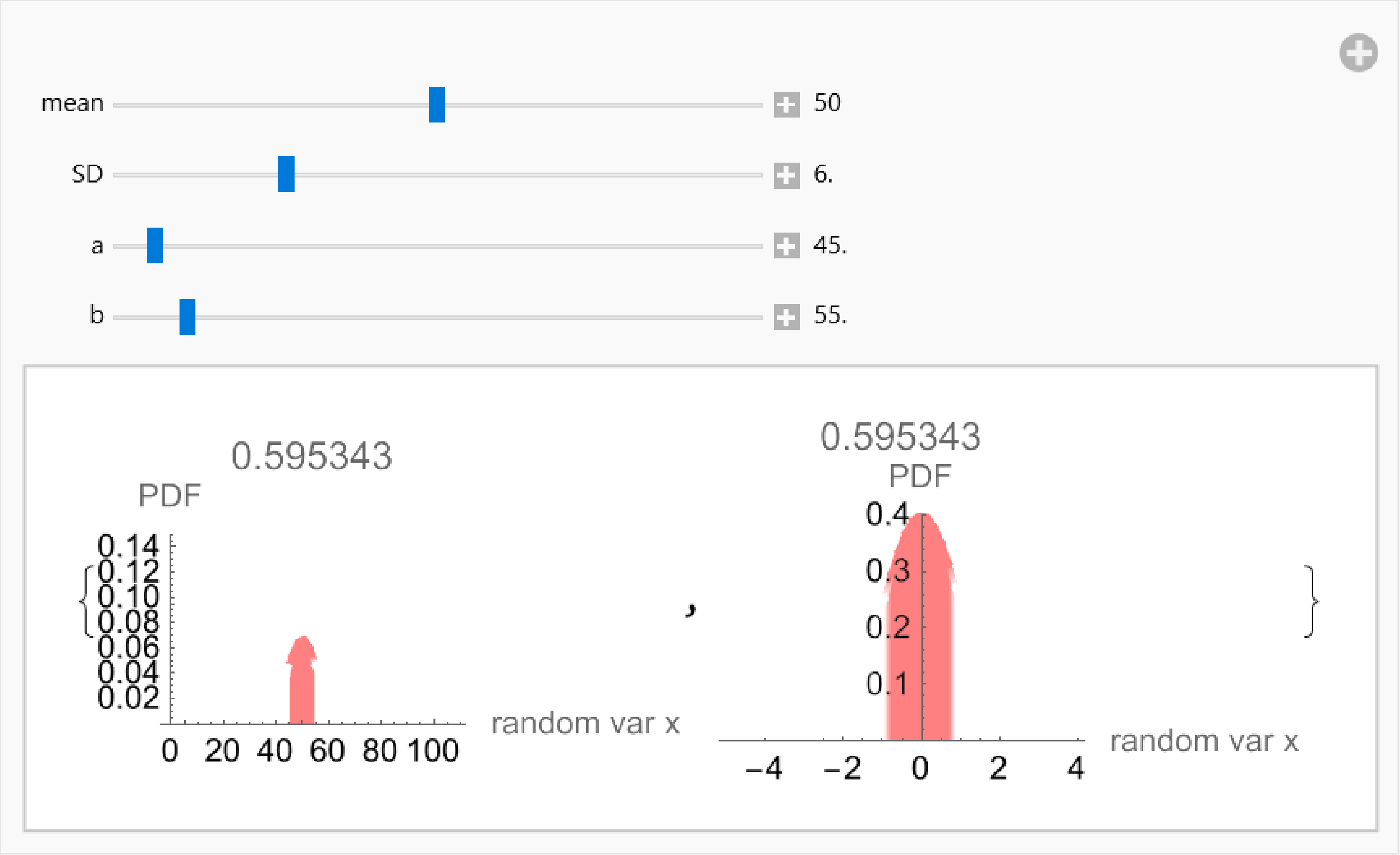


需要予測で正規分布を用いる

- レストランで１日の卵の消費量
- エステサロンの１日の売上高（収入）
- 米の消費量
- 米を米屋に発注してから届くまでの日数（時間）
- ラーメン屋でトッピング煮卵の１日の販売数
- 予測値が大きすぎるとフードロス，少ないと販売機会損失

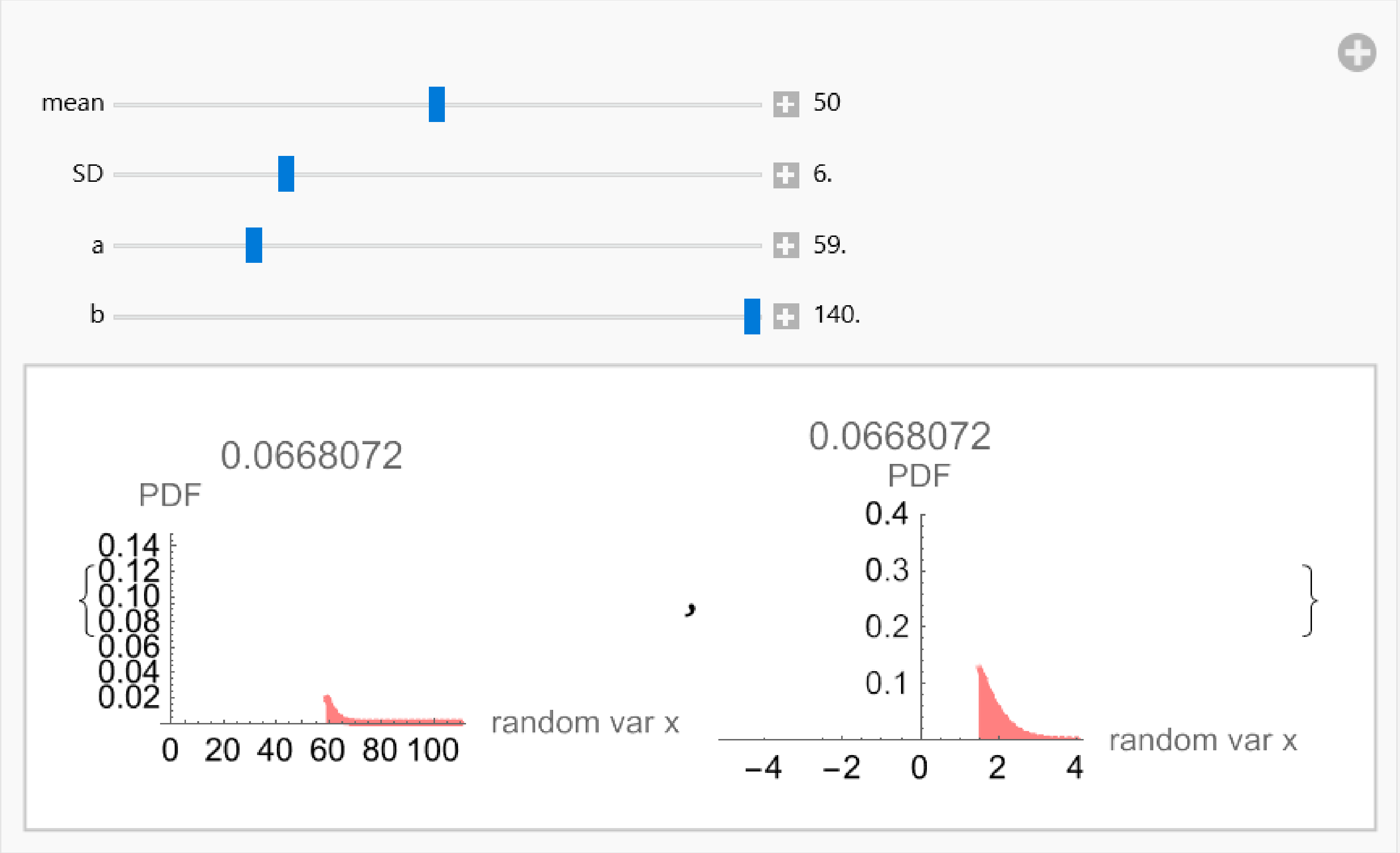
課題：米の消費量
正規分布の確率密度関数　N(50, 36)

- 1日の需要をN（50，36）で予想した場合，1日に45合以上55合以下に消費量が収まる確率を小数点以下3桁で求めよ．
- 同様に，1日に59合以上消費する確率を小数点以下3桁で求めよ．



1日に59合以上消費する確率を小数点以下3桁で求めよ.

- 右図は標準正規分布
- $\frac{(59-50)}{6}$ =? (求めよ)



リオーダーポイント

次の発注のタイミングを求める経営において非常に重要な問題
過剰在庫を避け，販売機会損失を防ぐ

リオーダポイントの問題

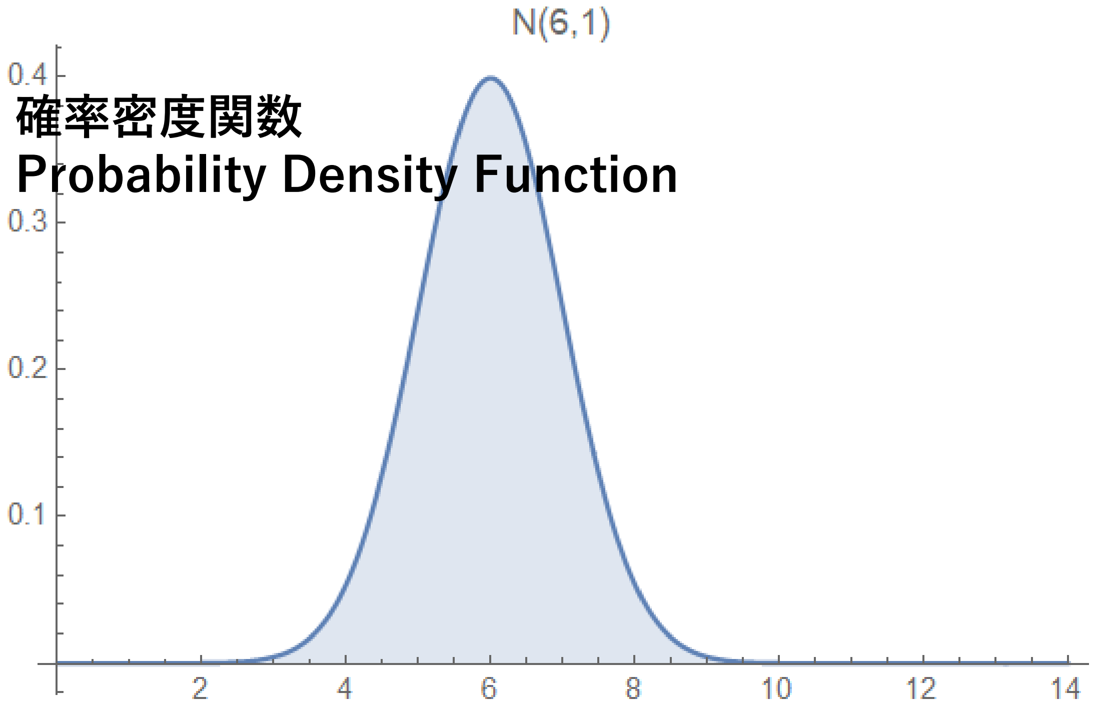
- 太郎さんの家では，男子3人がいるので，1日にお米を６合消費します．楽天天のいつもの米屋に発注すると届くまでのリードタイムは7日です．
- リオーダポイントは，6[合/日]×7[日]＝42[合] です．
- 在庫が42合になったタイミングで，次の発注をかけるべき
- 毎日の消費量が必ず6合以内であれば，まだ品切れになりません．
- 不確定要素
  - 子供がいつもよりたくさん食べたら不足してしまう
  - 楽天天の配達が遅くなったら，不足してしまう．
- お母さんは考えた：「品切れ率は低くしたいが，大量に在庫をもっておいたのでは，腐らせてしまうし，場所がもったいない．だが，品切れの確率は10％以内に抑えたい」
- 万が一品切れが起こったら，コンビニに高い米を買いにいけばOK

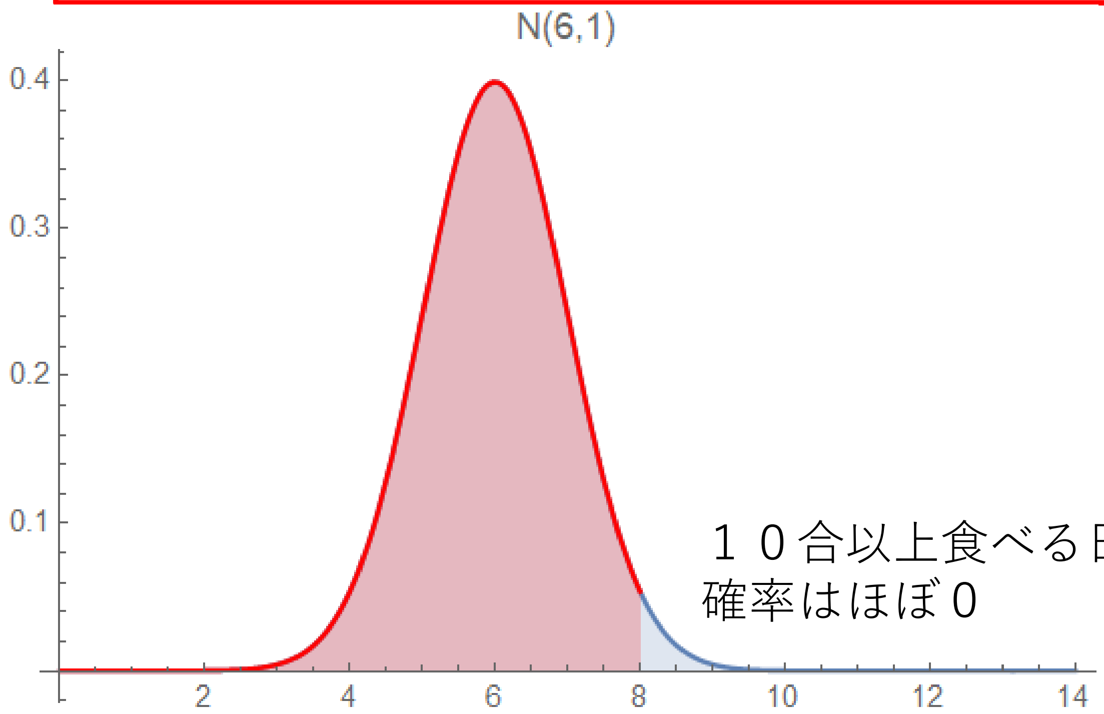
1日の消費量のゆらぎを正規分布(Normal Distribution)で表す

N(6, 1) 平均6，分散１の正規分布

赤の面積が，8合以下の消費量の日の確率

確率密度関数
Probability Density Function



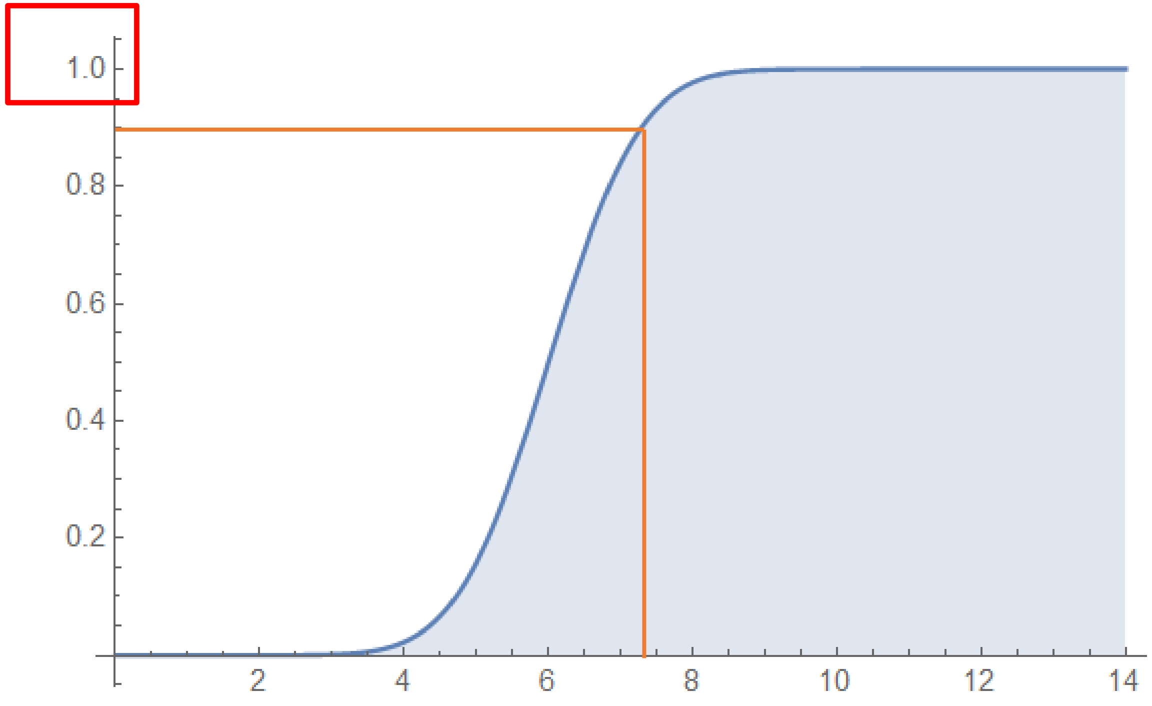


１０合以上食べる日の確率はほぼ０

累積確率密度関数
確率密度関数の積分値

累積確率密度関数

最大値は１です



N(6, 1)

- 1日の需要をN（6，1）で予想した場合，品切れ率10%の境界値は何合のところだろう？

4.	0.0227501
4.5	0.0668072
5.	0.158655
5.5	0.308538
6.	0.5
6.5	0.691462
7.	0.841345
7.5	0.933193
8.	0.97725
8.5	0.99379
9.	0.99865

解答：7.3合位

1日に7.3合以上消費する確率は約10%

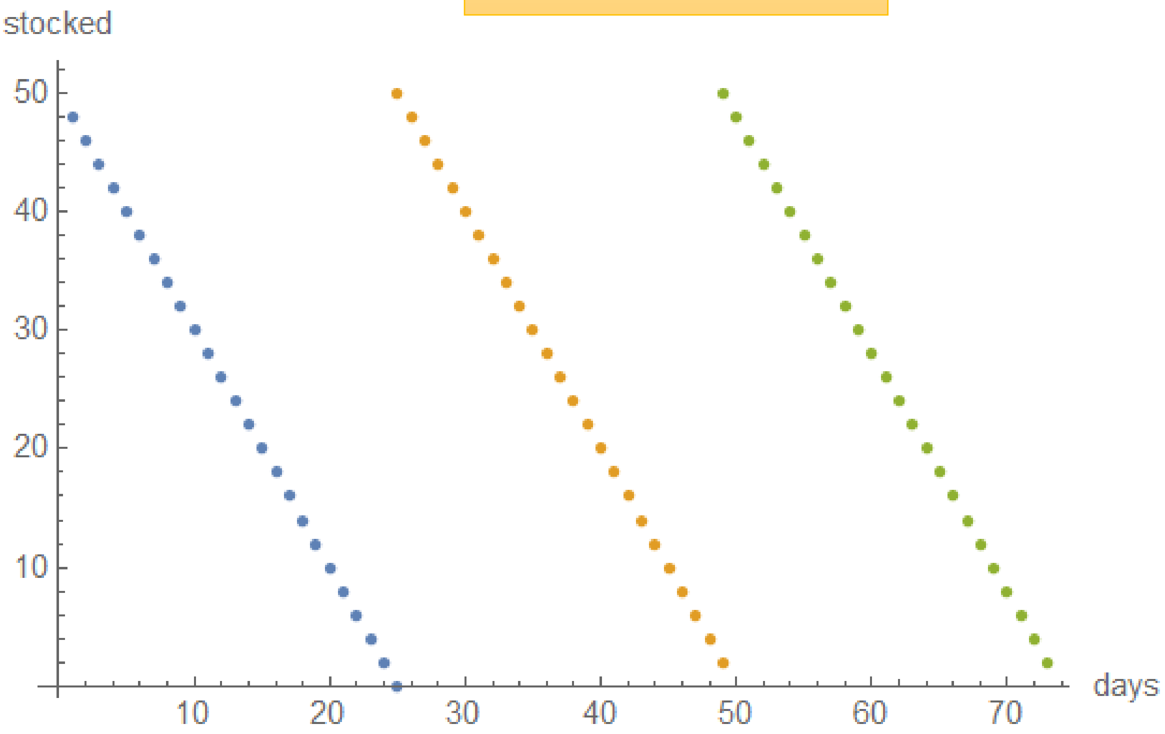
靴屋
在庫をどうもつと安心か

- 楽天天のAという店に発注すると２５日で届く(リードタイム)（発注が来てから生産する場合，日数がかかるので）
- 1日平均2個売れる.
- 在庫が50個に減った時点で発注をかければいいかな？
- リオーダーポイント　ROP

リオーダーポイント
需要一定，リードタイム一定の場合

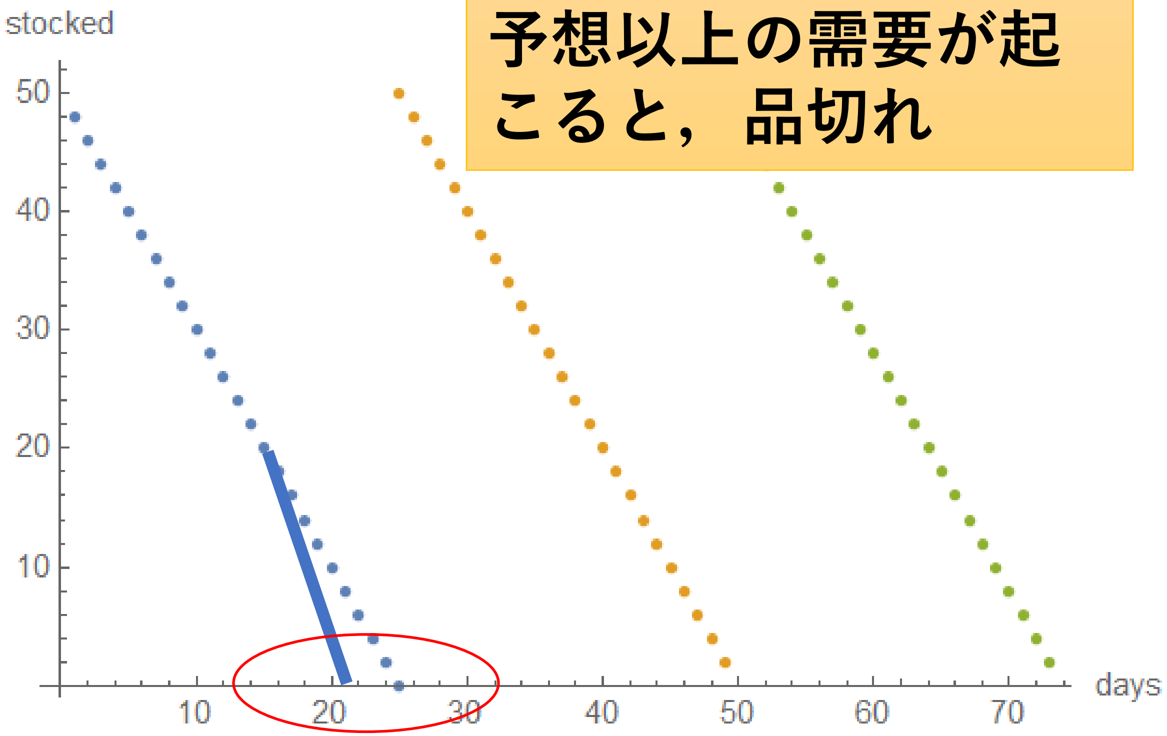
- LT: Lead Time
- d ：需要/日
- リオーダーポイント(個)=d×LT
- 50個をきったタイミングでRO

LT: 25 days
需要/日: 2 個



リオーダーポイント
需要一定，リードタイム一定の場合

- LT: Lead Time
- d ：需要/日
- リオーダーポイント(個)=d×LT



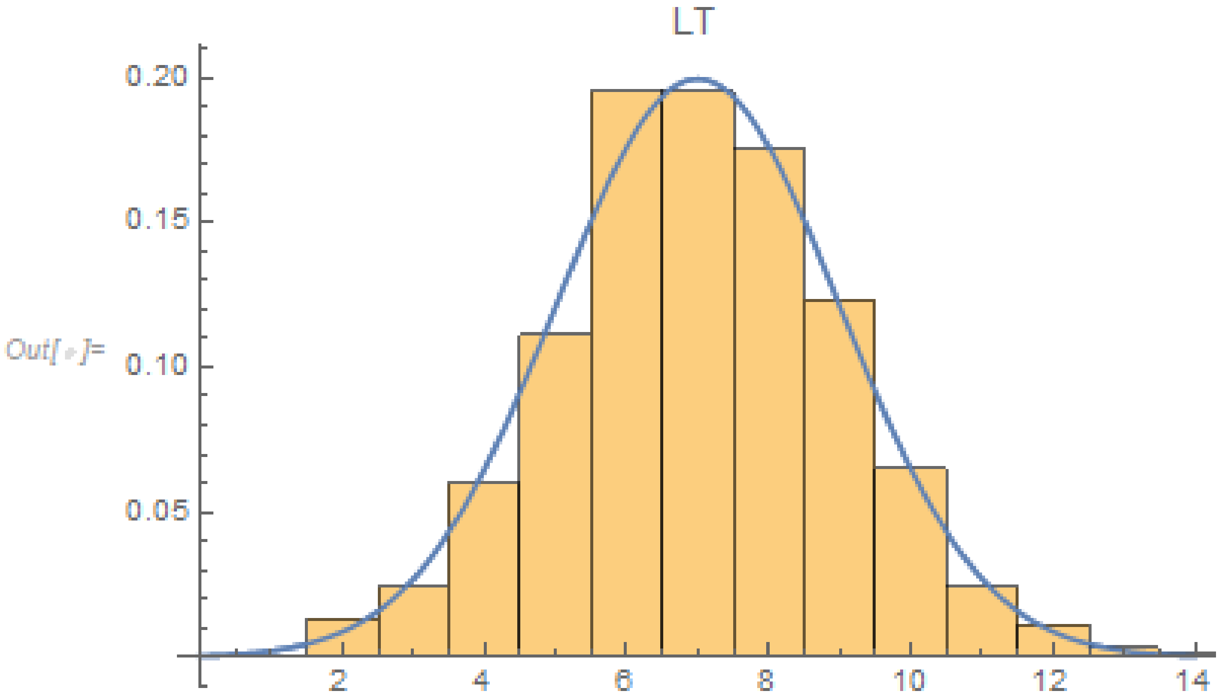
LT: 25 days
需要/日: 2 個
予想以上の需要が起こると，品切れ

ROP南極玉子の問題

- DEMAND
  ホテル白熊では，1日平均1000個の卵を使う．分散は300
  N(1000, 300)　で1日の需要予測を行うとする．
- LT
  特別な玉子を南極から輸入しているので，
  LTは平均7日かかる．分散は４．
  N(7, 4)
- 品切れは2.5％以下に抑えたい．
- 卵が何個に減ったら，発注をかける必要があるか？
  ROPを求めよ．

LTの分布は宅配次第

- N(7, 4)

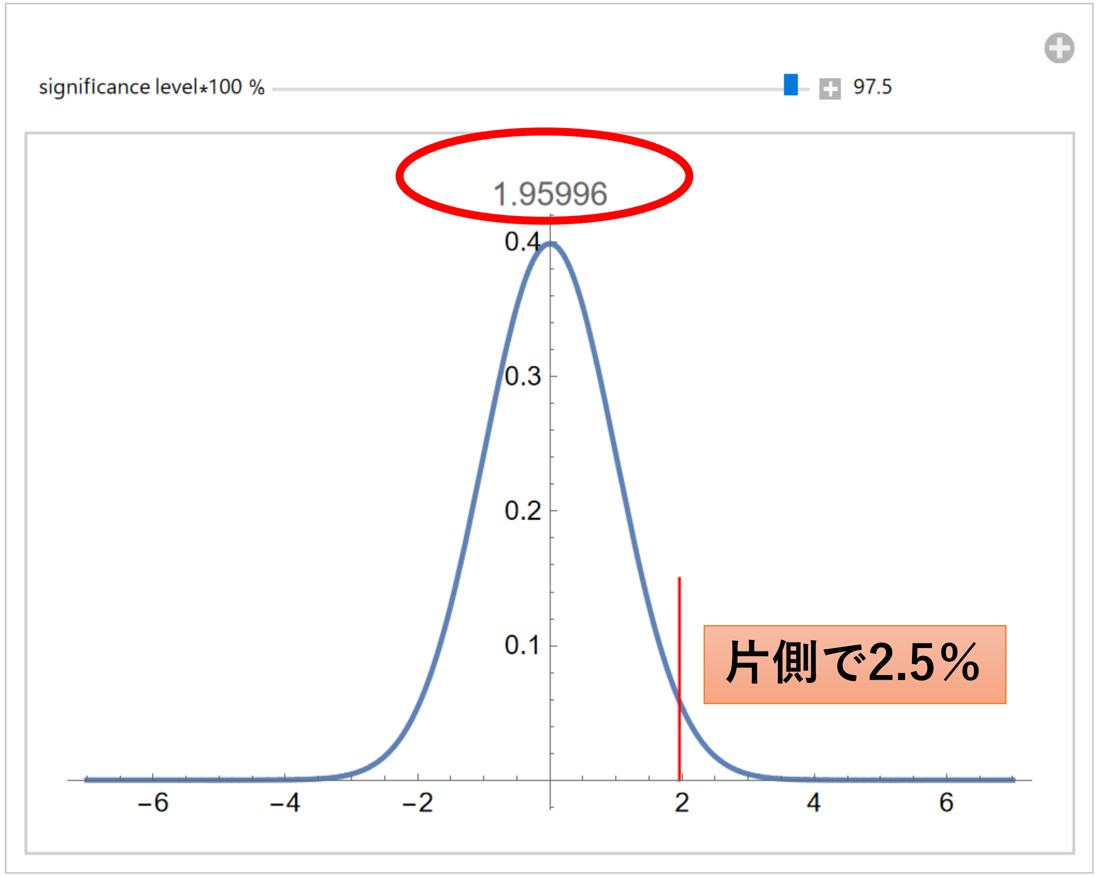


なにせ南極ですから，犬ぞりとヘリコプターを使います．
ふぶいていると飛べませんし，犬が動けなくなります．
（フィクションです）

正規分布で95％の範囲

- 1.96σまでの区間
  そのとき片側が2.5%になる

- 正規分布では
  -1.96σ～+1.96σの範囲が95%



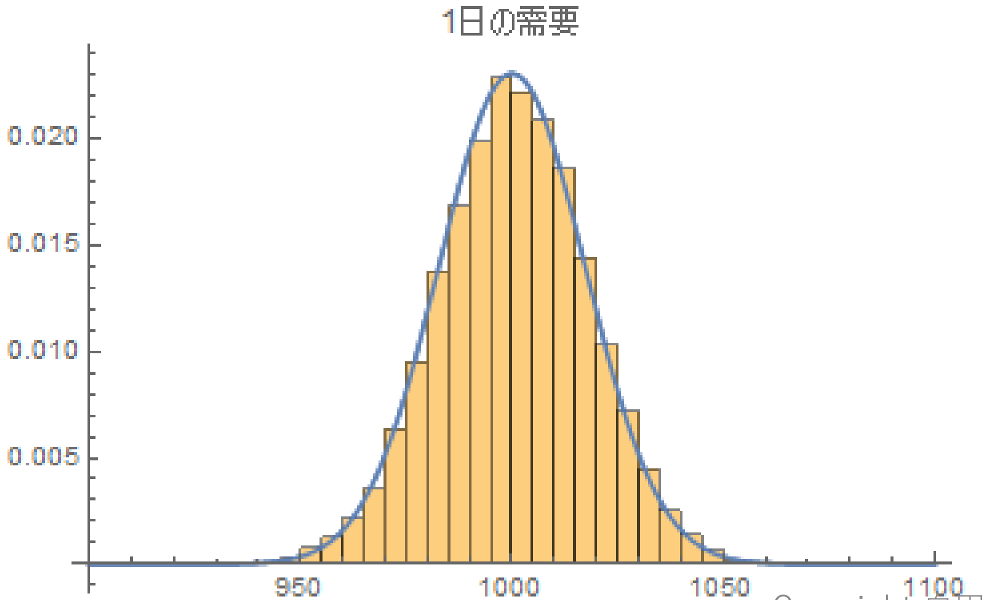
1日の需要が　N(1000, 300)のとき 7日間の平均需要の分布はどうなるか？

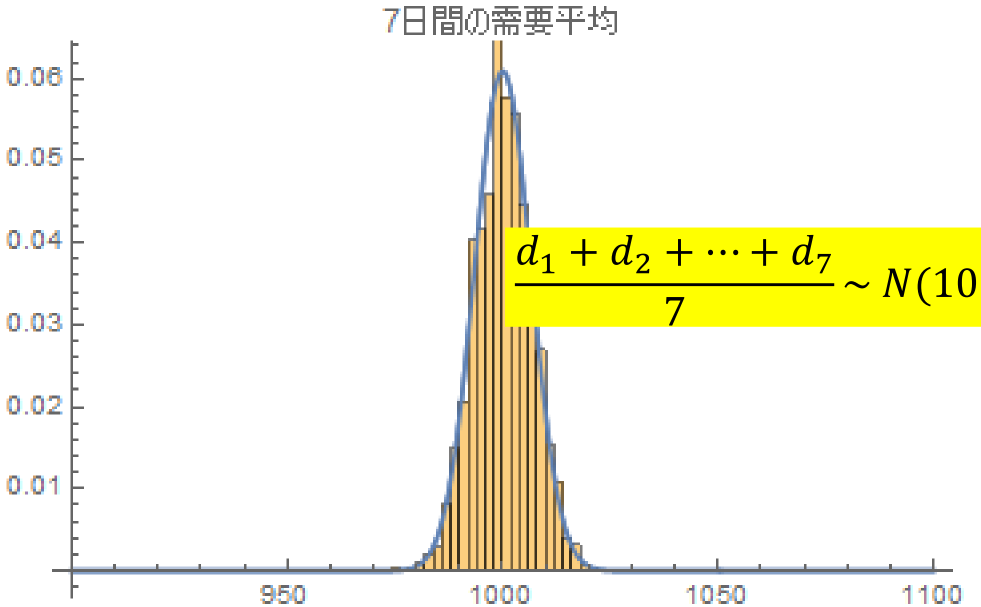
平均値は変わらない.
しかし，分散は多い日もあれば少ない日もあり相殺するので小さくなる.

- 中心極限定理から　$N(1000, \frac{300}{7})$となることが分かっている.
  定理です.

$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{LT}}{LT} \sim N(d, \frac{\sigma_d^2}{\mathrm{LT}})$$

$$d_i \sim N(d, \sigma_{\mathrm{d}}^2)$$

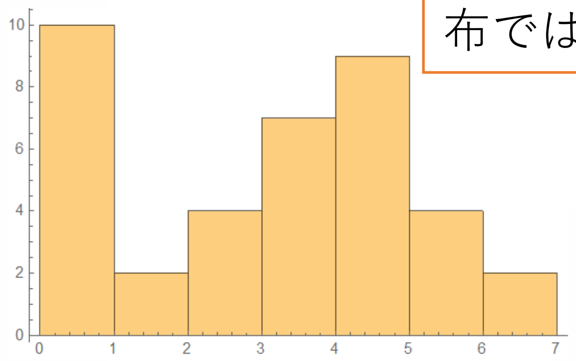


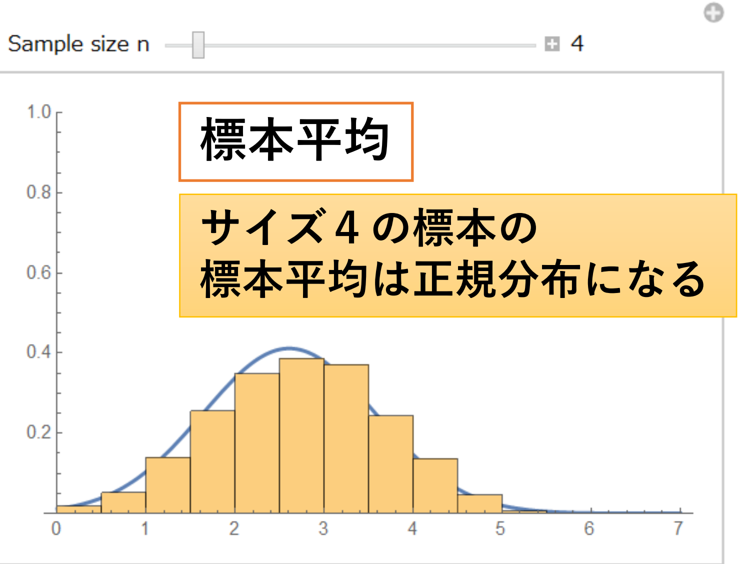


$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_7}{7} \sim N(1000, \frac{300}{7})$$

中心極限定理：ネコの出産1回で何匹？

1回に何匹産んだかの分布（正規分布ではない）

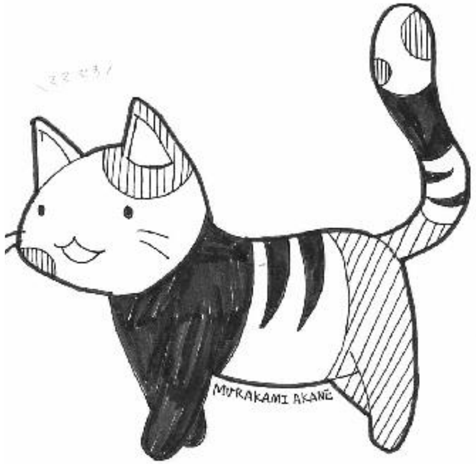




標本平均

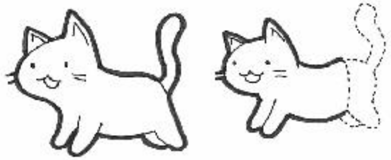
サイズ４の標本の標本平均は正規分布になる

Father



For example,

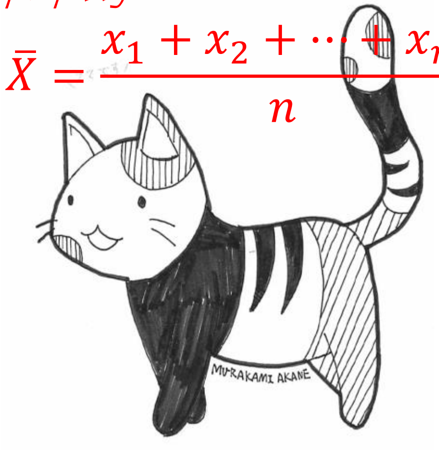
$$\bar{x} = \frac{2+0+4+1}{4} = \frac{7}{4}$$



中心極限定理

標本平均

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

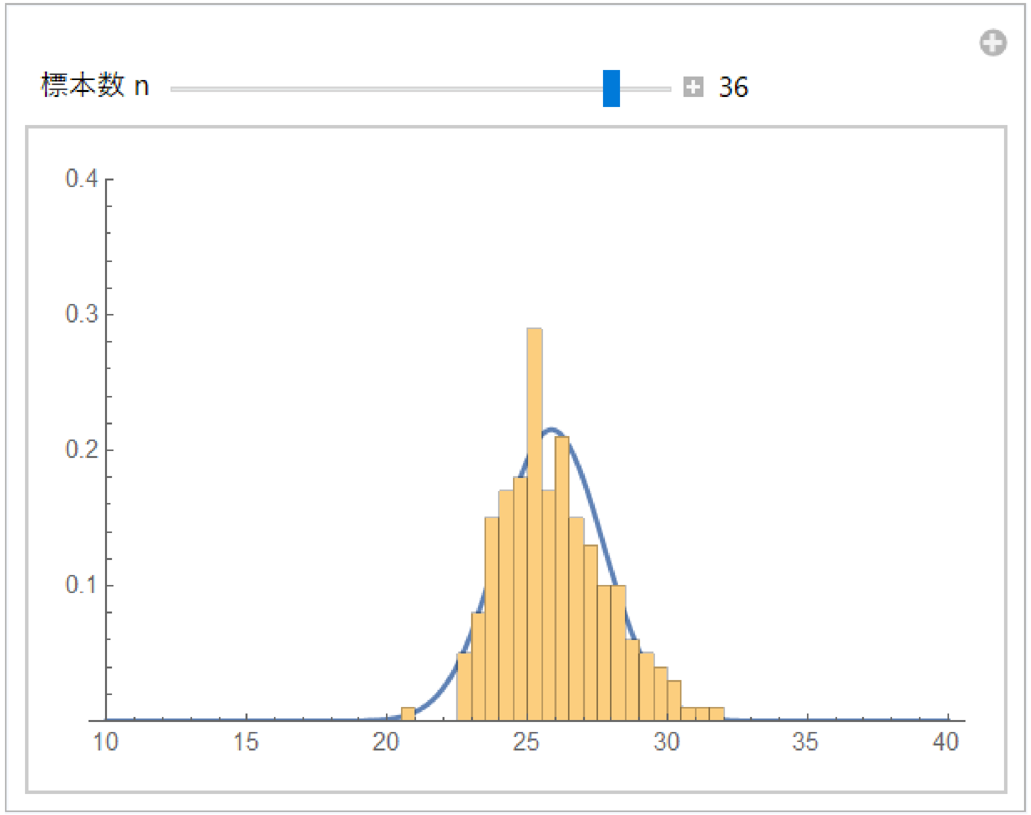


- ｎ個の標本の標本平均の分布は正規分布に近づいてくる
- 1回の試行の分布が正規分布でなくても，標本平均の分布は正規分布に近づく
- ｎ個の標本の標本平均の正規分布は，$N(d, \frac{\sigma_{\mathrm{d}}^2}{n})$
- 平均値は変わらない.
しかし分散は多い日もあれば少ない日もあり相殺するので
ｎ分の１と小さくなる

中心極限定理のグラフィクス教材

https://shirotaabc.sakura.ne.jp/usefulMath/ABC/7-19.cdf

- 初めは正規分布とは全く違う形状の分布だったがサイズnが大きくなるにつれて
- 標本平均のヒストグラムが次第に正規分布に近づく



Cited from Y. Shirota et al.,「大学生のための役に立つ数学」, p.143, Kyoritu, Tokyo, 2014.

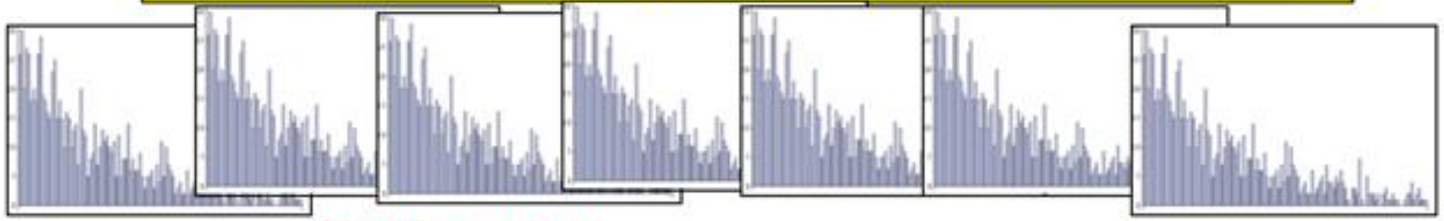
中心極限定理

中心極限定理： 平均μ，分散σ^2の母集団から無作為抽出した大きさnの標本平均の分布は，nが大きくなるにつれて，平均μ，分散σ^2/nの正規分布に近付く．

Central Limit Theorem (CLT)

The central limit theorem states:
Let $X_1, X_2, \ldots$ be an infinite sequence of independent random variables with identical distributions (Each X has mean μ and variance σ^2.)

independent and identically distributed (**i.i.d.**) random variables



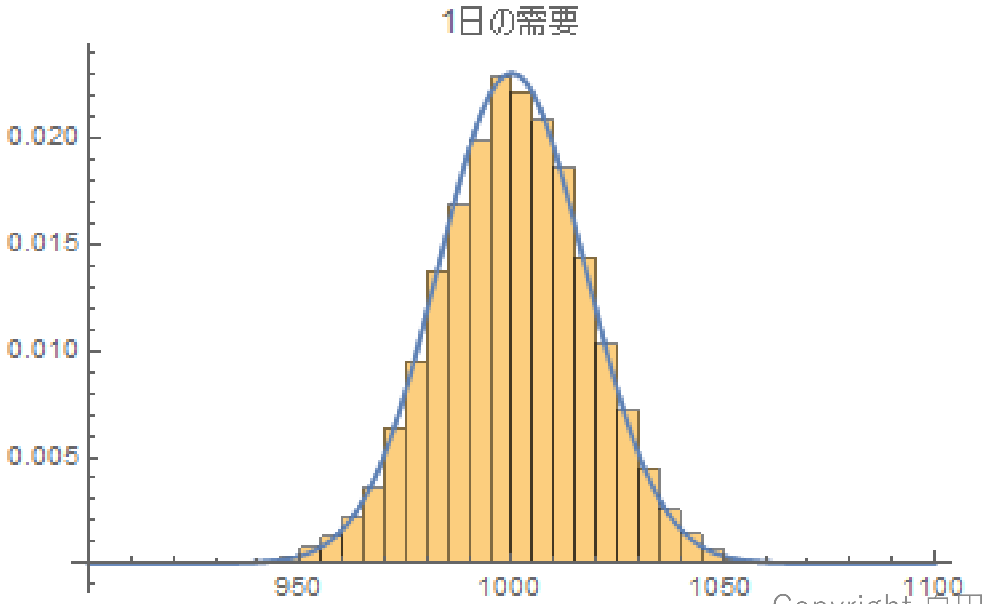
Then let $\bar{x} = \frac{\{X_1+X_2+\cdots+X_n\}}{n}$. Then $E(\bar{x})=\mu$ and $Var(\bar{x})=\sigma^2/n$. The central limit theorem says that, in the limit as n goes to infinity, $\bar{x}$ has a normal distribution.

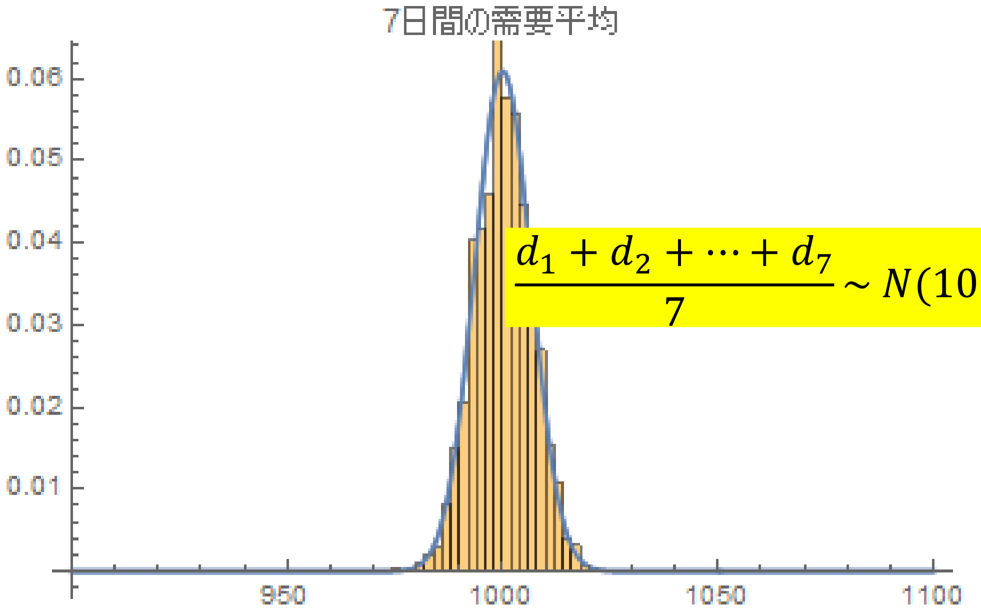
南極卵のROPに戻る
1日の需要が　N(1000, 300)のとき
7日間の平均需要の分布はどうなるか？

- 中心極限定理から　$N(1000, \frac{300}{7})$となることが分かっている.

$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{LT}}{LT} \sim N(d, \frac{\sigma_d^2}{\mathrm{LT}})$$

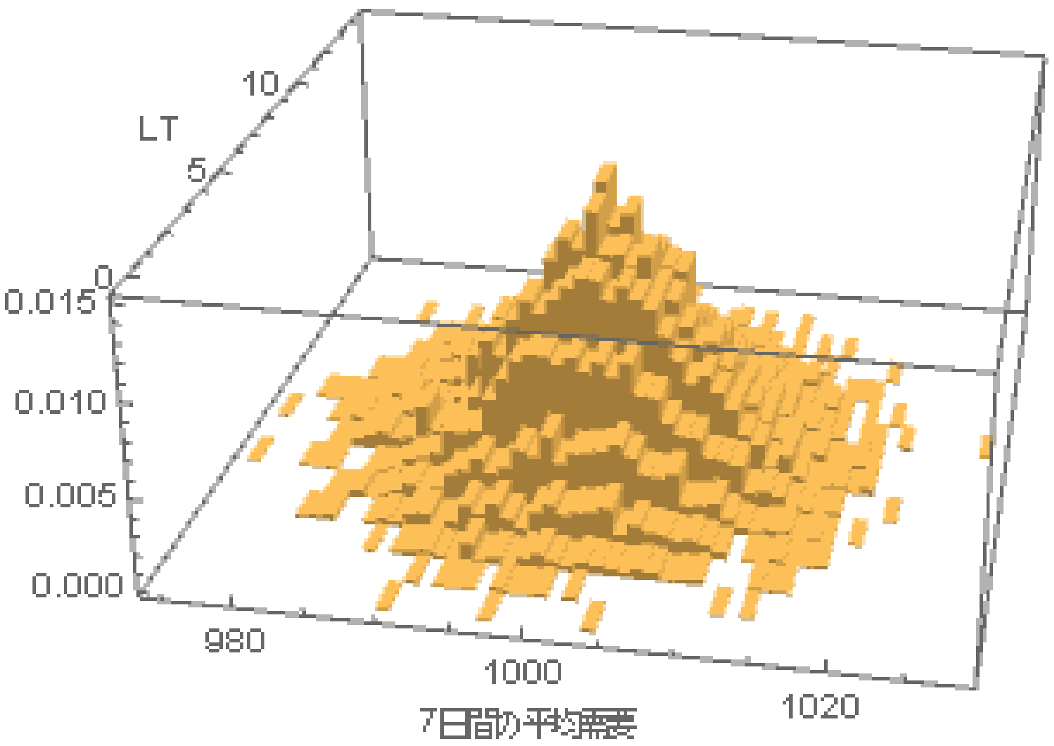
$$d_i \sim N(d, \sigma_{\mathrm{d}}^2)$$

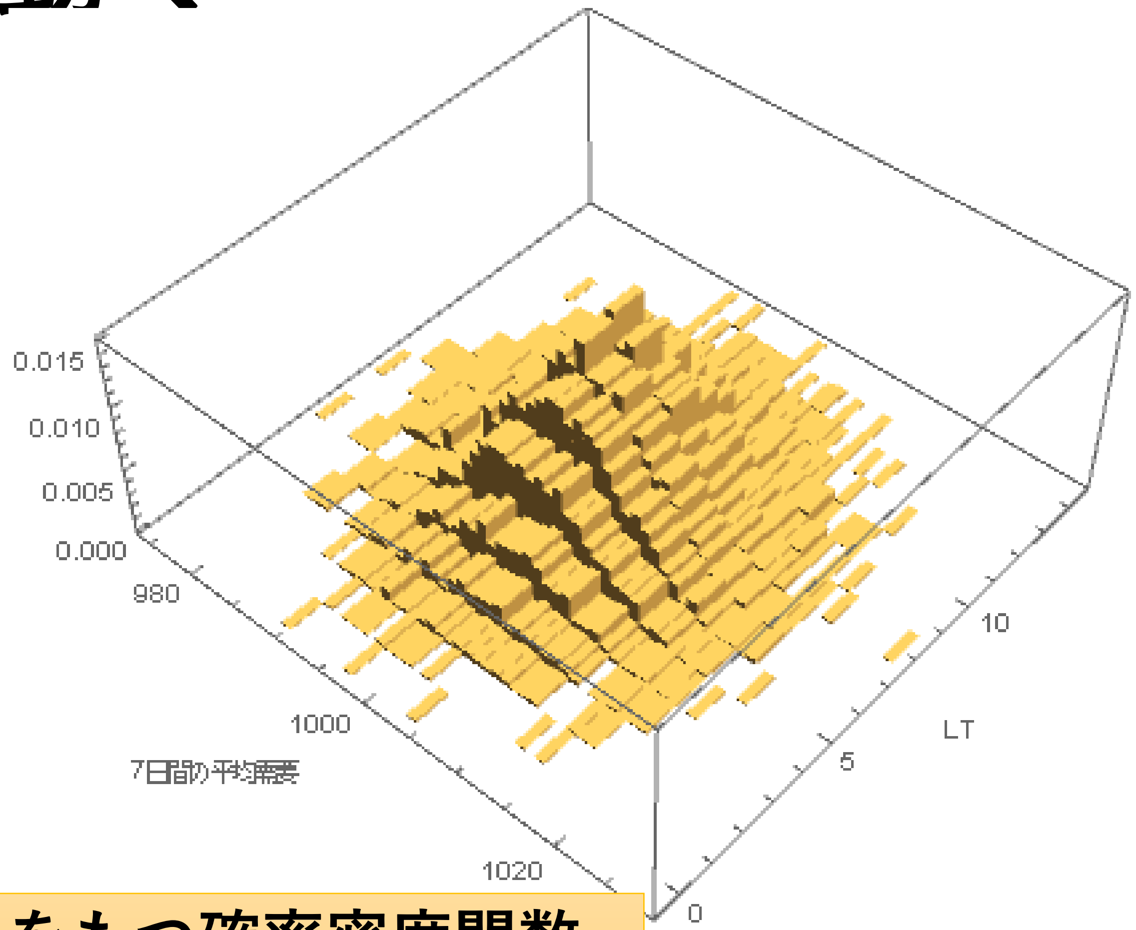




$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_7}{7} \sim N(1000, \frac{300}{7})$$

長期に渡って記録をとる
需要dも，LTも値が動く

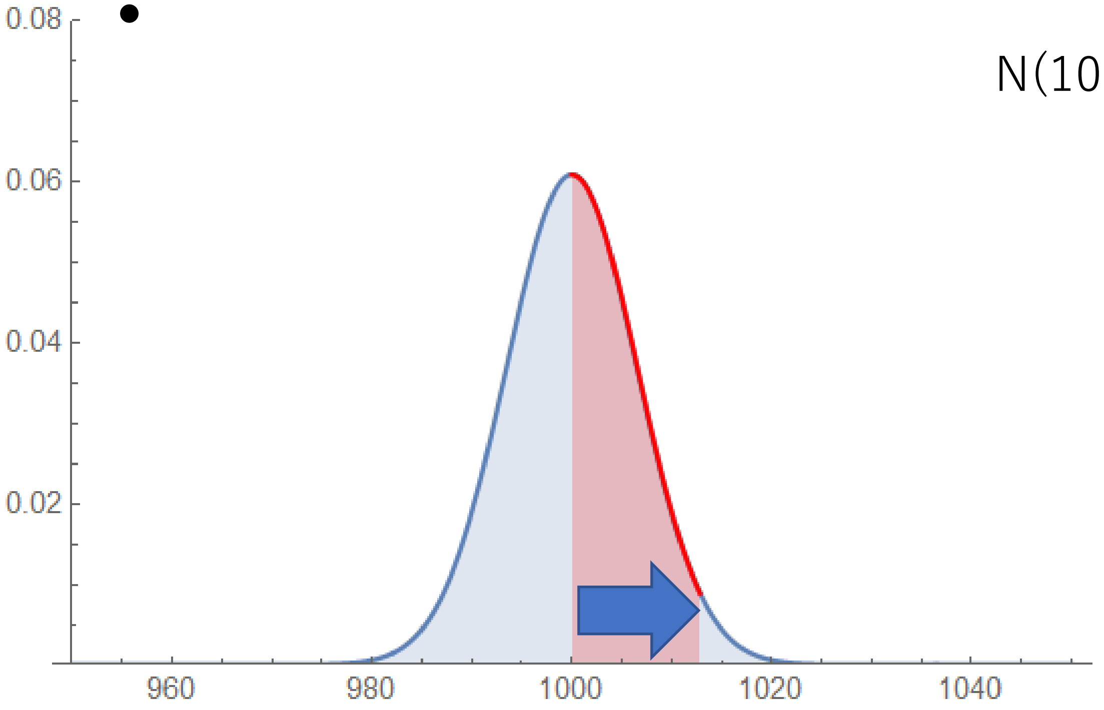




２つの確率変数（1週間平均の需要とLT)をもつ確率密度関数.
どういう日が一番多かったか(確率的に多いか）が分かります.

品切れ防止の安全在庫　Safety Stock

品切れ率を2.5%以下にしたい場合
1.96σ分平均よりも大きくとる



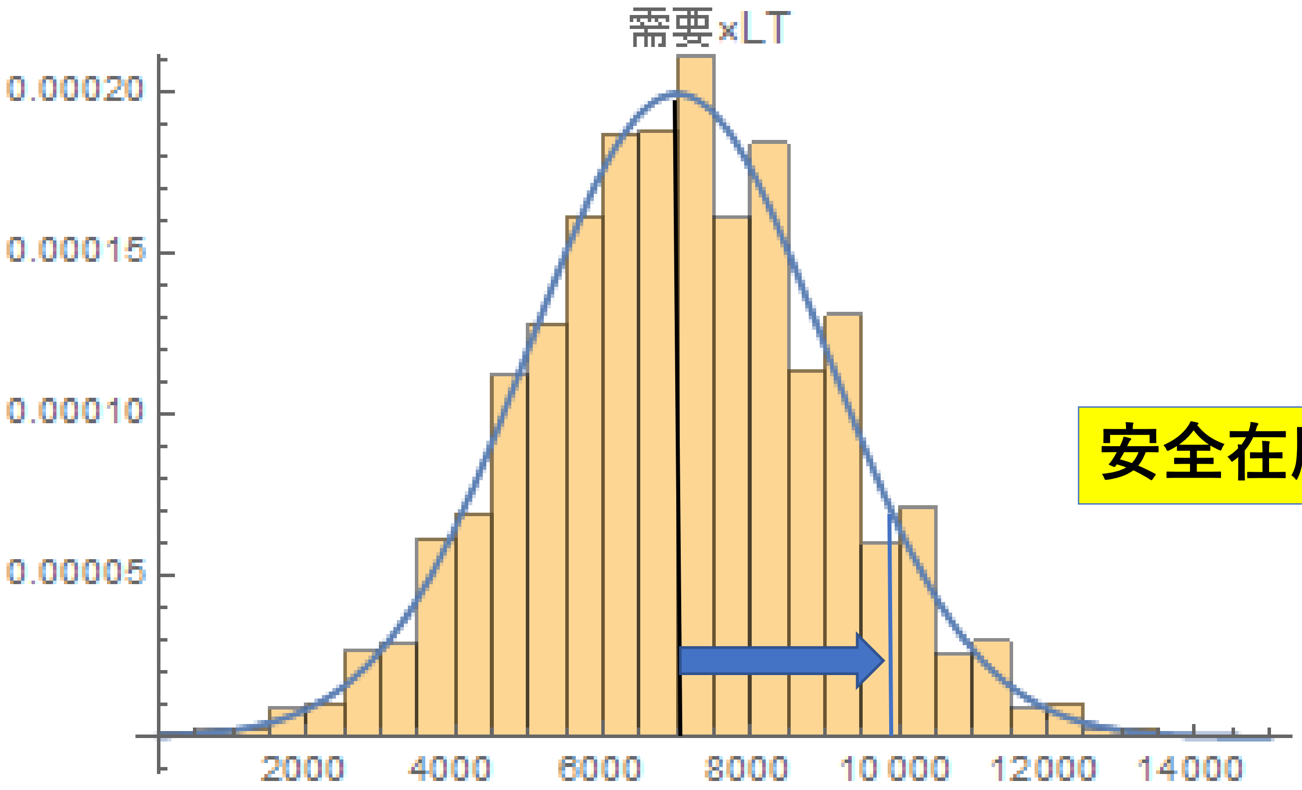
N(1000, 300)なので，　$\sigma_d = \sqrt{300}$

平均から1.96σ増やすと，
それ以上になる確率は2.5%となる

需要×LTの確率密度分布

需要×LT分布は厳密には正規分布にはならないが正規分布を仮定して正規分布で近似する

•



安全在庫　Safety Stock

安全在庫分をとって，
早めにROする
2つの変数が動く場合
計算は複雑になる（後述）

南極卵　リオーダーポイント
需要一定 リードタイム変動

- LT: Lead Time ～ $N(\overline{LT}, \sigma_{LT}^2)$
- d: daily demand
- 需要は固定なので，7日間平均は考えなくてよい
- 品切れ率を2.5%以下にしたい場合1.96σ分平均よりも大きくとる
- ROP=$(\overline{LT} + 1.96\,\sigma_{LT}) \times d = \overline{LT} \times d + 1.96\,\boldsymbol{\sigma_{LT}} \times d$

- 問題：ROPを計算せよ．
  解答：$(7 + 1.96 \times 2) \times 1000 = 10920$

1日の需要	1000
LT	N(7,4)

南極卵リオーダーポイント
需要変動 リードタイム一定

まずは，需要だけ正規分布にして，LTは固定として考えましょう

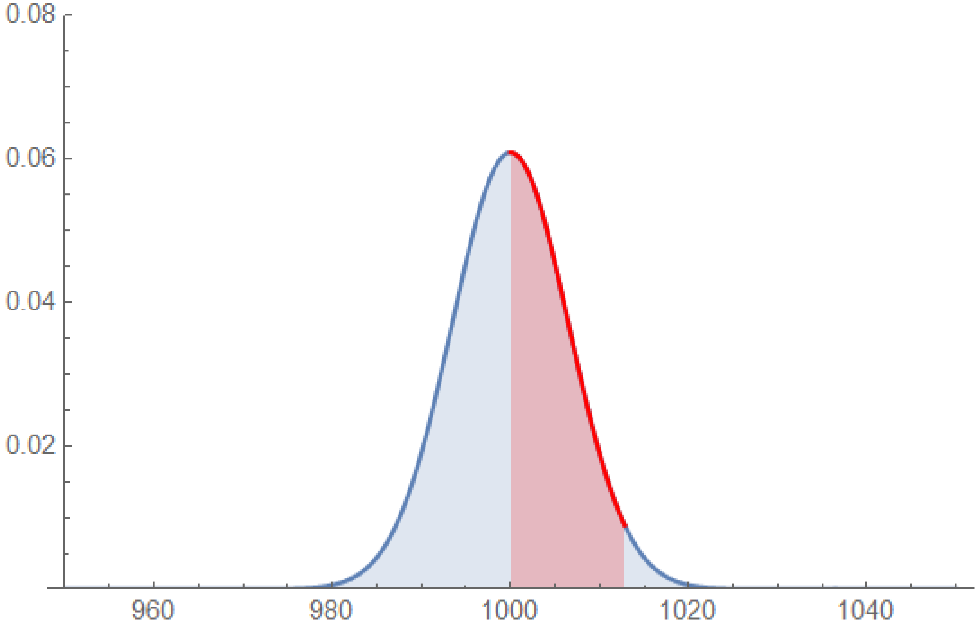
- LT: Lead Time
- d: 1日の需要

$$d_i \sim N(\bar{d}, \sigma_d^2)$$

- LT日間の需要の標本平均 $\dfrac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{LT}}{LT} \sim N(d, \dfrac{\sigma_d^2}{LT})$
- 品切れ率を2.5%以下にしたい場合1.96σ分平均よりも大きくとる
- ROP$=(\bar{d} + 1.96\sqrt{\dfrac{\sigma_d^2}{LT}}) \times LT$

$$=\bar{d} \times LT + 1.96\ \sigma_d\sqrt{LT}$$

- 問題：ROPを計算せよ． $1000 \times 7 + 1.96 \times \sqrt{300} \times \sqrt{7} = 7089.8$
- 解答： **約7090**



1日の需要　N(1000,300)
7日間の需要平均N(1000, 300/7)
LT　　　　7

南極卵　リオーダーポイント
需要変動 リードタイム変動

- LT:リードタイム～　$N(\overline{LT}, \sigma_{LT}^2)$
- d: 1日の需要～　$N(\bar{d}, \sigma_d^2)$
- LT 日間の標本平均　～

$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{LT}}{LT} \sim \quad N(d, \frac{\sigma_d^2}{\mathrm{LT}})$$

- 確率変数2個の場合，この公式

Var[XY]=Var[X]Var[Y]+E[X]² Var[Y]+ E[Y]² Var[X]

- ROP

$$= \bar{d} \times \overline{LT} + 1.96 \left(\frac{\sigma_d^2}{\overline{LT}} \times \sigma_{LT}^2 + \overline{LT}^2 \times \frac{\sigma_d^2}{\overline{LT}} + \bar{d}^2 \times \sigma_{LT}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1000 \times 7 + 1.96 \left(\frac{300}{7} \times 4 + 7^2 \times \frac{300}{7} + 1000^2 \times 4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1日の需要　N(1000,300)
LT　　　　N(7,4)
7日間の需要平均N(1000, 300/7)

- 計算結果： 10921.1　　　約10921

確率変数の演算の公式まとめ XとYが独立のとき

① $Var[X]=E[X^2]-E[X]^2$

② $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

③ $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$

④ $Var[X-Y]=Var[X]+Var[Y]$

⑤ $Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$ 独立なので0

⑥ $E[XY]=E[X]E[Y]$

この公式を使います

⑦ $Var[XY]=Var[X]Var[Y]+E[X]^2\,Var[Y]+E[Y]^2\,Var[X]$

２つのROPからの考察

- $\boldsymbol{LT}$変動　$\mathbf{10920}$
- 需要変動　7090
- 両方変動 10921
- LT ～ N(7,4)　というように精度がわるいので，ROPも大きくなってしまう.
- LTがもう少し短いところから買えないか検討する.
  しかし，南極卵は売りのポイントなので仕方ないかもしれない

課題　米のリオーダーポイント

- 太郎さんの家では，男子3人がいるので，1日にお米を平均３合消費します．楽天の米屋に発注すると，リードタイムは固定で4日です．
- お米の1日に消費量はN(３，0.8）に従うと仮定して，米の品切れ率を2.5%にするためのリオーダポイントを求めよ．
小数点以下１桁で求めよ．
- 提出の仕方：
まず，紙に手書きで計算した様子（信憑性書類）を作成し(氏名と学籍番号を記載せよ），写メする．その画像ファイルをレポートに提出．答えは別途小テストに打ち込む．