学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　名前

2012.4.23

構造化学（３）－理解を深めるために－

問 1-1　等式(6)を用いて等式

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \text{、} e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \text{、} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{、} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (9)$$

を示せ。

$$\left|e^{i\theta}\right| = \left|\cos\theta + i\sin\theta\right| =$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

＝

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

＝

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

＝

問 1-2　ド・モアブルの公式(8)を用いて

$\cos 2\theta$、$\sin 2\theta$、$\cos 3\theta$、$\sin 3\theta$

を求めよ。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　名前

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 =$$

従って　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$、　　　$\sin 2\theta =$

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 =$$

従って　$\cos 3\theta =$

$\sin 3\theta =$

問 1-3　等式(6)を用いて

$$\frac{d}{d\theta}e^{in\pi\theta} = in\pi\, e^{in\pi\theta} \tag{10}$$

を示せ。

$$\frac{d}{d\theta}e^{in\pi\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\cos n\pi\theta + i\sin n\pi\theta\right) =$$

問 1-4　下式から共通因数をくくりだせ。

$$\sum_{j=1}^{n} f_j e^{2\pi i\left(hx_j + ky_j + lz_j\right)} + \sum_{j=1}^{n} f_j e^{2\pi i\left(hx_j + ky_j + lz_j + \frac{h+k}{2}\right)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} f_j e^{2\pi i\left(hx_j + ky_j + lz_j + \frac{k+l}{2}\right)} + \sum_{j=1}^{n} f_j e^{2\pi i\left(hx_j + ky_j + lz_j + \frac{l+h}{2}\right)}$$

共通因数は　$\sum_{j=1}^{n} f_j e^{2\pi i\left(hx_j + ky_j + lz_j\right)}$

与式$=$

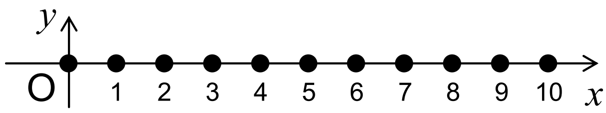
学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前

問2-1　波を伝える媒質が軸上に長く連続して並んでいる。この媒質中に１１個の代表質点を下図に示すように等間隔 a に選び、これらの質点に 0, 1, 2…, 10 と番号をつける。いまこれらの質点の振動がそれぞれの位置を中心として、振幅 A、周期８秒で、質点 0 から始まり右のほうへ順次１秒ずつ遅れて y 軸方向に単振動をはじめた。以下の問いに答えよ。

(a)　質点 0 が振動を始めてから４秒後の各質点の位置を図示せよ。

(b)　質点 0 が振動を始めてから８秒後の各質点の位置を図示せよ。

(c)　波の運動を表す式を書け。



(a)

(b)

(c)　$\xi(x,t)=$

問2-2　波 $\xi(x,t)=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-\upsilon t)\right\}$ のピーク位置の進む向きと速度を求めよ。

向き：　　　　、速度 υ

問2-3　$\xi_1(x,t)=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-\upsilon t)\right\}$ と $\xi_2(x,t)=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{\lambda}(x+\upsilon t)\right\}$ の重ね合わせの波はどのような波か。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前

$\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)=$

$\boxed{}$ 波となる。

問2-4　図３(a)、(b)において、上側の波を $\xi_1(x,t)=Ae^{2\pi ikx-i\omega t}$ とおき、下側の波の式と上下の波の重ねあわせを求めよ。

(a)　$\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)=$

(b)　$\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)=$

問3-1　ベクトル $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ のなす角を求めよ。

$\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right|=$　　、$\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right|=$　　、$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=$

求める角を θ とすると、$\cos\theta=$

従って $\theta=$

問 3-2　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$、$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ のとき、$|\mathbf{A}|$、$|\mathbf{B}|$、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ の値を求めよ。

$|\mathbf{A}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=$　　　　$|\mathbf{B}|=$　　　　$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=$

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前

問3-3　問 3-2 の **A**、**B** のつくる平行四辺形の面積を求めよ。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3\times1-2\times5\\2\times3-1\times1\\1\times5-3\times3\end{pmatrix}=$$

面積は　$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=$

問3-4　ベクトル$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$のつくる平行六面体の体積を求めよ。

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right|=$$

問 3-5　学籍番号から３つのベクトルをつくり、そのベクトルのつくる平行六面体の体積を求めよ。（09-042-100 なら(0,9,0)、(0,4,2)、(1,0,0)など。作ったベクトルが平行にならないようにする。）

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　名前

問 4-1　等式

$$\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}+\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right\} \tag{31}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}-\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right\} \tag{32}$$

を用いて式(22)、(23)を示せ。

$n\neq m$のとき

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=$$

$$=$$

$n=m$のとき

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}+\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}\right\}dx$$

$n\neq m$のとき

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}-\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right\}dx$$

$n=m$のとき

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=$$

学籍番号

$=$

問4-2　式(25)、(26)の左辺に式(21)を代入し、右辺が得られることを示せ。ただしこの場合、和の積分は積分の和となる。(式の中の n についての和を１からある整数 N までにしておき、最後に $N\to\infty$ にすると項別積分が許される。)

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L}+b_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\right\}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{1}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \qquad\qquad +b_m \qquad\qquad \right)$$

ここで、最初の項は０である。また、

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=0 \tag{24}$$

なので、b_n の係数は０である。また、

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases} & (n\neq m)\\ & (n=m)\end{cases} \tag{22}$$

より、m に関する和の中で $m=n$ の項以外は０になる。従って、

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L}+b_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\right\}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{1}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \qquad\qquad +b_m \qquad\qquad \right)$$

ここで、最初の項は０である。また、

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx=0 \tag{24}$$

であるから、a_n の係数は０である。また、

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　名前

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} & (n \neq m) \\ & (n = m) \end{cases} \tag{23}$$

より、m に関する和の中で $m=n$ の項以外は 0 になる。従って、

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx =$$

問 4-3　$c_0 = \frac{1}{2}a_0$、$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (n>0)$、$c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \quad (n<0)$ とおくと、式(29)から式(21)が得られることを示せ。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=0}^{0} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=0}^{0}\frac{a_0}{2}e^{i\frac{0\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \qquad\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$ （$m=-n$ とおいた）

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{i\frac{-n\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$ （変数 m を n に変えた）

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{i\frac{-n\pi x}{L}} + \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\frac{n\pi x}{L}}\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}a_n\left(e^{i\frac{-n\pi x}{L}} + \qquad\right) + \frac{1}{2}b_n\left(\qquad\qquad\right)\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \qquad\qquad + b_n \qquad\qquad\right)$$