

非定常および反転不可能な時系列モデルに関する統計的推測

一橋大経済 田中 勝人

1. 非正則な極限分布への3つの接近方法

線形の時系列モデルにおいては、定常性や反転可能性がみたされるならば、種々の統計量は標準的な分布に従い、統計的推測も基本的には正規分布に基づいて行うことができる。しかし、定常性や反転可能性が成り立たないと、非正則な分布を扱う必要が出てくる。本節では、簡単な例を取り上げながら、非正則な分布を導出するための3つの接近方法 (*stochastic process approach, eigenvalue approach, Fredholm approach* と呼ぶことにする) について説明する。

例えば、AR(1) モデル

$$(1) \quad y_j = \rho y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad (j = 1, \dots, T)$$

を考えよう。ただし、 $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ であり、 $y_0 = 0$ とする。このとき、 $\{y_j\}$ は、 $|\rho| < 1$ ならば漸近的に定常、 $|\rho| \geq 1$ ならば非定常となる。特に、定常と非定常の境界点 $\rho = \pm 1$ の場合に2次の標本モーメントは次のような漸近分布をもつ。

$$(2) \quad \mathcal{L} \left(\frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 \right) \rightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^1 w^2(t) dt \right)$$

$$(3) \quad = \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} Z_n^2 \right)$$

$$(4) \quad = \mathcal{L} \left(\int_0^1 \int_0^1 (1 - \max(s, t)) dw(s) dw(t) \right).$$

ここで、 $\{w(t)\}$ は $[0,1]$ 上の標準ブラウン運動であり、 $\{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1)$ である。極限分布を3つの同値な表現で与えたが、これらの導出方法は以下の通りである。以下、(1) のモデルで $\rho = 1$ (AR unit root case) とする。 $\rho = -1$ の場合も同様である。

まず、(2) の極限分布の表現を得るためには、関数空間 $C[0,1]$ 上の部分和過程

$$(5) \quad X_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^j \varepsilon_i + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{1}{\sqrt{T}} \varepsilon_j, \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

を考えると、Donsker の定理 (Billingsley (1968)) より、 $\mathcal{L}(X_T/\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(w)$ となる。従って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 &= \frac{1}{T \sigma^2} \sum_{j=1}^T X_T^2 \left(\frac{j}{T} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^1 X_T^2(t) dt + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} \left[X_T^2 \left(\frac{j}{T} \right) - X_T^2(t) \right] dt \end{aligned}$$

において、右辺第2項は0に確率収束するので、連続写像の定理 (CMT) により目的の表現を得る。

次に、(3)の表現については、Donskerの定理から、 $\{\varepsilon_j\}$ に最初から正規性を仮定してもよい。このとき、 $y = (y_1, \dots, y_T)'$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)'$ とすれば、 $\sum_{j=1}^T y_j^2 = y'y = \varepsilon' C' C \varepsilon$ を得る。ただし、 C は (j, k) 要素が $j \geq k$ のとき1、その他は0となる $T \times T$ の下三角行列である。 C をランダム・ウォーク生成行列と呼ぶことにする。 $C' C = [(T+1 - \max(j, k))]$ の固有値は

$$\lambda_{jT} = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{j - \frac{1}{2}}{2T+1} \pi \right)^{-2}, \quad (j = 1, \dots, T)$$

であるから、直交変換により

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \lambda_{jT} Z_j^2 \right)$$

を得る。ここで、 $\{Z_j\} \sim \text{NID}(0, 1)$ であり、 λ_{jT} の性質から、

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^T \left(\frac{1}{T^2} \lambda_{jT} - \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \right) Z_j^2 = 0$$

が成立する (Tanaka(1996, p.3))。以上から、(3)の表現を得る。

最後に、(4)の表現であるが、まず

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 &= \frac{1}{T^2 \sigma^2} \varepsilon' C' C \varepsilon \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T B_T(j, k) \tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_k \end{aligned}$$

を考える。ただし、 $B_T(j, k)$ は $C' C / T$ の (j, k) 要素であり ($B_T(j, k) = (T+1 - \max(j, k))/T$)、 $\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j / \sigma$ である。このとき、 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の連続、対称かつ正値定符号関数 $K(s, t) = 1 - \max(s, t)$ が存在して、

$$(6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{j, k} \left| B_T(j, k) - K \left(\frac{j}{T}, \frac{k}{T} \right) \right| = 0$$

となる。また、Mercerの定理 (Hochstadt (1973)) より、 $K(s, t)$ は

$$(7) \quad K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} f_n(s) f_n(t)$$

と展開される。ここで、 λ_n は $K(s, t)$ の固有値、すなわち積分方程式

$$(8) \quad f(t) = \lambda \int_0^1 K(s, t) f(s) ds$$

の固有値である。また、 $f_n(t)$ は λ_n に対応する固有関数であり、全体が正規直交化されている。(7) の収束は絶対一様収束であり、このことと、 $\{\tilde{\varepsilon}_j/\sigma\}$ が i.i.d.(0, 1) であることから、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T K \left(\frac{j}{T}, \frac{k}{T} \right) \tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_k \right) &\rightarrow \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^T f_n \left(\frac{j}{T} \right) \tilde{\varepsilon}_j \right)^2 \right) \\ &\rightarrow \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_0^1 f_n(t) dw(t) \right)^2 \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dw(s) dw(t) \right) \end{aligned}$$

を得る (Nabeya and Tanaka (1988))。

ところで、統計的推測の観点からは、極限分布の表現から分位点をいかに計算するかということが問題になる。そのためには、特性関数を求め、反転する必要がある。

上述の3つの極限分布の表現は、当然ながら同一の特性関数を与えるはずであるが、このことをそれぞれの表現から導出する方法を示すことにする。

まず、(2) の極限分布の積率母関数 (m.g.f.)

$$(9) \quad m_1(\theta) = E \left[\exp \left\{ \theta \int_0^1 w^2(t) dt \right\} \right]$$

を求める。そのために、確率微分が

$$(10) \quad dY(t) = \beta Y(t) dt + dw(t), \quad Y(0) = 0$$

で定義される $C[0, 1]$ 上の Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 過程 $\{Y(t)\}$ を導入する。ここで、 β は任意の定数である。このとき、Girsanov の定理 (Liptser and Shiryaev (1977)) から、 $\{w(t)\}$ が誘導する測度 μ_w と $\{Y(t)\}$ が誘導する測度 μ_Y は互いに絶対連続であり、 $x(0) = 0$ となるような $C[0, 1]$ 上の点 x で評価された Radon-Nikodym の導関数は

$$\frac{d\mu_w}{d\mu_Y}(x) = \exp \left[-\beta \int_0^1 x(t) dx(t) + \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \right]$$

で与えられる。従って、

$$\begin{aligned} m_1(\theta) &= E \left[\exp \left\{ \theta \int_0^1 Y^2(t) dt \right\} \frac{d\mu_w}{d\mu_Y}(Y) \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ \left(\theta + \frac{\beta^2}{2} \right) \int_0^1 Y^2(t) dt - \beta \int_0^1 Y(t) dY(t) \right\} \right] \end{aligned}$$

となり、特に $\beta = \sqrt{-2\theta}$ とおき、伊藤の補題を使えば

$$\begin{aligned} m_1(\theta) &= E \left[\exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (Y^2(1) - 1) \right\} \right] = e^{\beta/2} E \left[e^{-\beta Y^2(1)/2} \right] \\ &= e^{\beta/2} \left[1 - 2 \times \left(-\frac{\beta}{2} \right) \times \frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta} \right]^{-1/2} \\ &= (\cosh \beta)^{-1/2} = (\cosh \sqrt{-2\theta})^{-1/2} \end{aligned}$$

を得る。ここで、(10) より、各 t に対して

$$Y(t) = e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dw(s) \sim N\left(0, (e^{2\beta t} - 1)/(2\beta)\right)$$

となることを使った。このことから、(2) の分布の特性関数は $(\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2}$ となる。

次に、(3) の分布の特性関数は、 $\{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1)$ であることと $\cos x$ の無限乗積展開より、

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left\{ i\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \right\} \right] &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2i\theta}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \right)^{-1/2} \\ &= (\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2} \end{aligned}$$

となる。

最後に、(4) の分布の特性関数については、Anderson-Darling (1952) の定理を使う。すなわち、 $K(s, t)$ が $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の連続、対称、ほぼ定符号 ((8) の形の積分方程式の固有値のうち、有限個を除いては同符号) 関数ならば、

$$(11) \quad E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dw(s) dw(t) \right\} \right] = [D(2i\theta)]^{-1/2}$$

となる。ただし、 $D(\lambda)$ は $K(s, t)$ の Fredholm 行列式 (FD) である。FD は、2 次形式に現れる行列の固有多項式の無限次元バージョンであり、

$$D(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^{\ell_n}$$

と無限乗積展開される。ここで、 λ_n は $K(s, t)$ の固有値、 ℓ_n は λ_n の重複度であり、 λ_n に対応する固有関数で 1 次独立なもの最大個数に一致する。すなわち、 $D(\lambda)$ は $D(0) = 1$ となる λ の整関数であり、その零根は $K(s, t)$ の固有値全体と一致する。

FD を求めるためには、(8) の形の積分方程式と同値な微分方程式を考える方が求めやすい。今の場合、 $K(s, t) = 1 - \max(s, t)$ であり、

$$f(t) = \lambda \int_0^1 (1 - \max(s, t)) f(s) ds$$

\Leftrightarrow

$$f''(t) + \lambda f(t) = 0, \quad f(1) = f'(0) = 0$$

\Leftrightarrow

$$f(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} t + c_2 \sin \sqrt{\lambda} t, \quad f(1) = f'(0) = 0$$

を得る。ここで、 $c = (c_1, c_2)'$ は 0 ベクトルでない定数ベクトルである。境界条件から、

$$\begin{pmatrix} \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff M(\lambda)c = 0$$

となり、 $f(t)$ が固有関数となる必要十分条件は $|M(\lambda)| = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$ である。固有値 λ は 0 とはなりえないから、 $\cos \sqrt{\lambda} = 0$ が固有値の条件を与える。 $\tilde{D}(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$ とおくと、 $\tilde{D}(0) = 1$ であり、 $K(s, t) = 1 - \max(s, t)$ の FD となるための条件は、

- i) $\tilde{D}(\lambda)$ の零根は $K(s, t)$ の固有値であり、逆に、 $K(s, t)$ のすべての固有値は $\tilde{D}(\lambda)$ の零根である；
- ii) $\tilde{D}(\lambda)$ は

$$\tilde{D}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^{\ell_n}$$

と無限乗積展開される。ただし、 λ_n は $K(s, t)$ の固有値であり、 ℓ_n は λ_n の重複度である。

上の条件 i) は、積分方程式と同値な微分方程式に基づいて導出された $\tilde{D}(\lambda)$ に関する条件であり、 $\tilde{D}(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$ は明らかに i) をみたす。また、ii) については $\cos \sqrt{\lambda}$ が無限乗積展開可能なこと、さらに各 λ_n に対して $f_n(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} t$ ($c_1 \neq 0$) であり、重複度は 1 となることから成立が保証される。以上より、 $K(s, t) = 1 - \max(s, t)$ の FD は $D(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$ であり、(11) を使えば

$$E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 \int_0^1 (1 - \max(s, t)) dw(s) dw(t) \right\} \right] = \left(\cos \sqrt{2i\theta} \right)^{-1/2}$$

を得る。

以上、簡単な例に基づいて、極限分布の表現から特性関数を求める 3 つの方法を述べたが、これらを整理してみると表 1 のようになる。

分布関数を計算するためには、特性関数を反転しなければならない。非負値確率変数 X に対しては、その特性関数を $\phi(\theta)$ とするとき、 X の分布関数は、

$$(12) \quad P(X \leq x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-i\theta x}}{i\theta} \phi(\theta) \right] d\theta$$

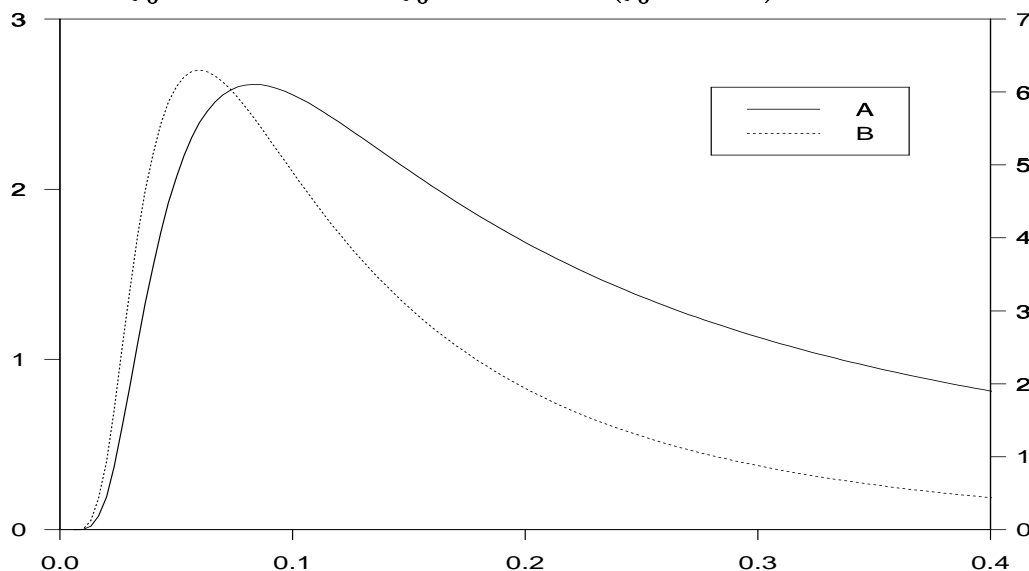
により、数値積分を使って計算することができる。さらに、密度関数 $f(x)$ は、

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta x} \phi(\theta) \right] d\theta$$

表 1 非正則な分布への3つの接近方法

	Stochastic Process Approach	Eigenvalue Approach	Fredholm Approach
分布の表現	$\int_0^1 w^2(t) dt$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$	$\int_0^1 \int_0^1 (1 - \max(s, t)) dw(s) dw(t)$
使用する定理など	部分和過程 汎関数 CLT 連続写像の定理	行列の固有値 直交変換	Mercer の定理 CLT
特性関数の導出	Girsanov の定理 (数式処理)	χ^2 分布の加重和	Fredholm 行列式 (数式処理)
特徴	測度論的	線形代数的	解析的

図 1 A : $\int_0^1 w^2(t) dt$ と B : $\int_0^1 w^2(t) dt - \left(\int_0^1 w(t) dt\right)^2$ の密度関数



により計算される。図 1 には、 $\phi(\theta) = \phi_1(\theta) = (\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2}$ に対応する密度関数が示されている。

同様に、(1) のモデルにおいて $\rho = 1$ のとき、標本平均 \bar{y} で修正された 2 次の標本モーメントについて、次のような漸近分布が得られる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left(\frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y})^2 \right) &\rightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^1 w^2(t) dt - \left(\int_0^1 w(t) dt \right)^2 \right) \\
 &= \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} Z_n^2 \right) \\
 &= \mathcal{L} \left(\int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) dw(s) dw(t) \right).
 \end{aligned}$$

さらに、これらの極限分布の特性関数は

$$\phi_2 = \left(\frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2}$$

与えられる。図1には、この場合の密度関数も示されている。

本節で述べた例では、3つのアプローチのいずれを使っても、極限分布および特性関数を求めることが可能である。しかし、問題によっては適用不可能か適用しにくいアプローチもあり、適切なアプローチを選択する必要性が生ずる。次節では、さまざまな統計的問題を取り上げて、それぞれにふさわしいアプローチで問題の解を与えることにする。

2. 種々の非正則問題

2.1. 自己回帰係数の推定量

再度、モデル (1) を考える。すなわち、

$$(14) \quad y_j = \rho y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad (j = 1, \dots, T)$$

を考察の対象とする。ここで、 $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ であり、 $y_0 = 0$ とする。ただし、 ρ は前と異なり、固定された値 c を使って $\rho = 1 - (c/T)$ と表される (near AR unit root case) とする。パラメータが標本サイズに依存するのは、例えば2項分布 $B(n, p)$ とポアソン分布 $P_o(\lambda)$ において、 $np = \lambda$ とする場合と同様である。

以上の設定のもとで、 ρ の最小2乗推定量 (LSE)

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{j=2}^T y_{j-1} y_j}{\sum_{j=2}^T y_{j-1}^2}$$

の漸近分布を導出したい。そのために、

$$\begin{aligned} T(\hat{\rho} - 1) &= \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T y_{j-1} (y_j - y_{j-1}) \bigg/ \frac{1}{T^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 \\ &= \left[\frac{1}{2T} y_T^2 - \frac{1}{2T} \sum_{j=1}^T (y_j - y_{j-1})^2 \right] \bigg/ \frac{1}{T^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 \end{aligned}$$

の極限分布を考える。この問題に対しては、stochastic process approach が最も適切である。まず、 $C[0, 1]$ における部分和過程

$$Y_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} y_j + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{T}}, \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

を構成すると、 $\rho = 1 - (c/T)$ のもとで $T \rightarrow \infty$ のとき、 $\mathcal{L}(Y_T/\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ が成立する (Tanaka (1996, p.93))。ただし、 $Y = \{Y(t)\}$ は (10) で定義された O-U 過程で、 β を $-c$ としたものである。従って、CMT より、

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{2T} y_T^2 - \frac{1}{2T} \sum_{j=1}^T (y_j - y_{j-1})^2, \frac{1}{T^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{2} Y_T^2(1) - \frac{1}{2T} \sum_{j=1}^T \varepsilon_j^2 + o_p(1), \frac{1}{T} \sum_{j=2}^T Y_T^2 \left(\frac{j-1}{T} \right) \right) \right) \\
&\rightarrow \mathcal{L} \left(\left(\frac{\sigma^2}{2} (Y^2(1) - 1), \sigma^2 \int_0^1 Y^2(t) dt \right) \right)
\end{aligned}$$

を得る。再度、CMT と伊藤の補題を使って、

$$\mathcal{L}(T(\hat{\rho} - 1)) \rightarrow \mathcal{L} \left(\frac{\frac{1}{2} (Y^2(1) - 1)}{\int_0^1 Y^2(t) dt} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{\int_0^1 Y(t) dY(t)}{\int_0^1 Y^2(t) dt} \right)$$

となる。

$T(\hat{\rho} - 1)$ の極限分布を計算するためには、まず、

$$U = \int_0^1 Y(t) dY(t), \quad V = \int_0^1 Y^2(t) dt$$

の同時 m.g.f. を Girsanov の定理により求めて、

$$\begin{aligned}
m_1(\theta_1, \theta_2) &= E[\exp\{\theta_1 U + \theta_2 V\}] \\
&= \exp\left(\frac{c - \theta_1}{2}\right) \left[\cos \mu + (c - \theta_1) \frac{\sin \mu}{\mu} \right]^{-1/2}
\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\mu = \sqrt{2\theta_2 - c^2}$ である。このとき、極限分布は

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} P(T(\hat{\rho} - 1) \leq x) &= P(xV - U \geq 0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \text{Im}[m_1(-i\theta, i\theta x)] d\theta
\end{aligned}$$

により計算される。

図2には、さまざまな $\rho = 1 - (c/T)$ の値に対応する $T(\hat{\rho} - 1)$ の極限分布の密度関数が示されている。 $c > 0$ の場合の密度において、左すその確率は、単位根仮説 $H_0: \rho = 1$ を左片側対立仮説 $H_1: \rho < 1$ に対して検定する場合、 $T(\hat{\rho} - 1)$ に基づく検定の $\rho = 1 - (c/T)$ のもとでの漸近的な検出力を与える。 $c < 0$ の場合には、右片側対立仮説のもとでの検出力を与えることになる。

ρ が 1 に近いときには、 $\hat{\rho}$ の分布を近似する場合、Edgeworth 型の近似よりも、ここで考えた $\rho = 1 - (c/T)$ のもとでの $T(\hat{\rho} - 1)$ の極限分布の方が近似の程度がよい。図3は、モデル(14)において、 $\{y_j\}$ が正規定常 AR(1) 過程に従い、真の $\rho = 0.96$, $T = 25$ の場合の $T(\hat{\rho} - \rho)$ の分布を比較したものである。極限分布は $c = T(1 - \rho) = 1$ において評価され、

$$\begin{aligned}
P(T(\hat{\rho} - \rho) \leq x) &= P(T(\hat{\rho} - 1) \leq x - c) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \text{Im}[m_2(-i\theta, i\theta(x - c))] d\theta
\end{aligned}$$

図2 $\int_0^1 Y(t)dY(t) / \int_0^1 Y^2(t)dt$ の密度関数

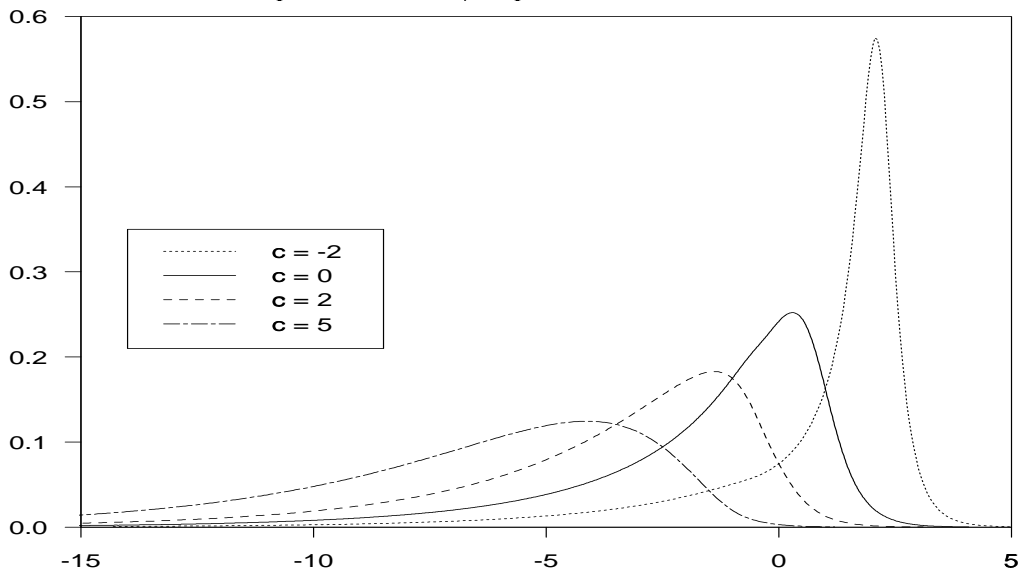
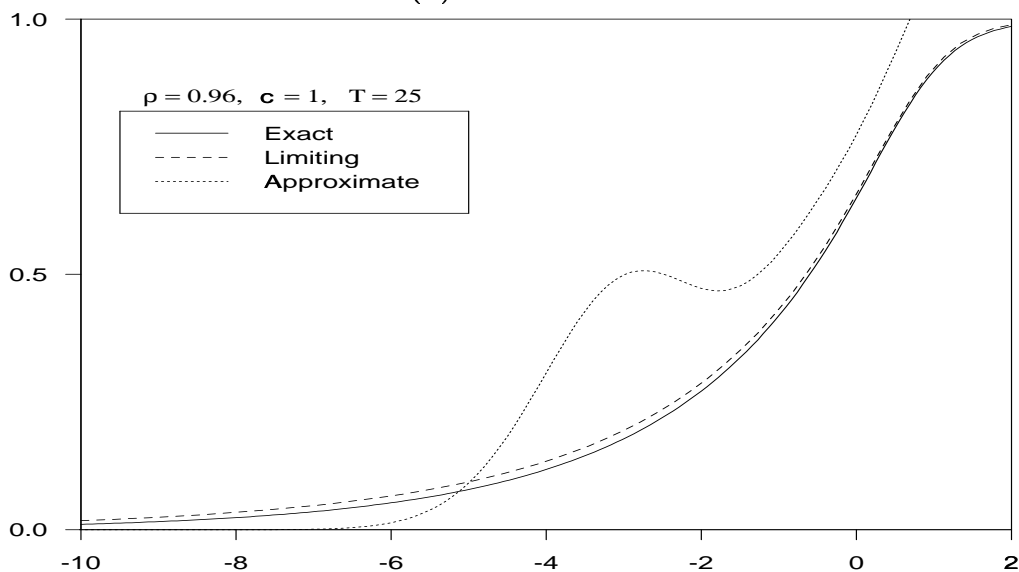


図3 AR(1) 係数の LSE の分布



に従って計算されている。ただし、 $m_2(\theta_1, \theta_2)$ は、前述の U と V の同時 m.g.f. であるが、今の場合 $\{Y(t)\}$ は $Y(0) \sim N(0, 1/(2c))$ なる O-U 過程であり、

$$m_2(\theta_1, \theta_2) = \exp\left(\frac{c - \theta_1}{2}\right) \left[\cos \mu + \frac{2c - \theta_1^2 - 2\theta_2}{2c} \frac{\sin \mu}{\mu} \right]^{-1/2}$$

で与えられる (Tanaka (1996, p.238))。他方、Edgeworth 展開は、Phillips (1978) により、

$$P(T(\hat{\rho} - \rho) \leq x) \cong \Phi(y) + \phi(y) \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\rho(1+y^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{1}{4T} \frac{(1-\rho^2)y + (1+\rho^2)y^3 - 2\rho^2 y^5}{1-\rho^2} \right]$$

で与えられる。ただし、 $y = x / \sqrt{T(1 - \rho^2)}$ であり、 $\Phi(y)$ と $\phi(y)$ は $N(0,1)$ の分布関数と密度関数である。

モデル (14) は、さまざまな方向に拡張されている。例えば、 $\{\varepsilon_j\}$ を i.i.d. でなく定常過程あるいは mixing 条件をみたすような過程とする場合 (Phillips (1987), Phillips and Solo (1992)), AR(p) 過程とした場合 (Chan and Wei (1988), Jeganathan (1991)), 時系列回帰の場合 (Nabeya and Tanaka (1990a)) などである。

2.2 移動平均モデルにおける単位根検定

次数 1 の移動平均 (MA(1)) モデル

$$(15) \quad y_j = \varepsilon_j - \alpha\varepsilon_{j-1}, \quad (j = 1, \dots, T)$$

において、単位根検定

$$H_0 : \alpha = 1 \quad \text{against} \quad H_1 : \alpha < 1$$

を考える。ここで、パラメータ α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ であるものとする。検定の目的の 1 つは、過剰階差 (overdifferencing) のチェックである。このとき、 $\{y_j\}$ は原系列でなく、階差を施した系列とみなされる。そして、 H_0 が受容されれば階差は不要 (= 原系列は定常的) であり、棄却されれば原系列は非定常的で AR 部分に単位根をもつことになる。

誤差項 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ は $NID(0, \sigma^2)$ に従うものとする。初期値 ε_0 については次の 2 通りの場合を考えると、それぞれに対して最適な検定 (LBI, LBIU 検定) は、以下で定義する S_{T1} と S_{T2} が大きいときに H_0 を棄却するものとなる (Tanaka (1990b))。

i) $\varepsilon_0 = 0$ の場合

$$S_{T1} = \frac{y' C' e e' C y}{y' C' C y},$$

ii) $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2)$ で、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ と独立の場合

$$S_{T2} = \frac{1}{T} \frac{y' \left(C' C - \frac{1}{T+1} C' e e' C \right)^2 y}{y' \left(C' C - \frac{1}{T+1} C' e e' C \right) y}.$$

ただし、 $y = (y_1, \dots, y_T)'$, C は $T \times T$ のランダム・ウォーク生成行列、 $e = (1, \dots, 1)': T \times 1$ である。

上記 2 つの検定は、誤差項の初期値 ε_0 の異なった特定化から生じたものであり、以下で述べるように漸近的にも違う性質を持っている。このことは、反転可能な

MA モデルでは起こりえない現象である。実際、局所対立仮説 $H_1 : \alpha = 1 - (c/T)$ のもとで、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(S_{T_1}) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{c^2 + 3c + 3}{3} Z_1^2\right), \\ \mathcal{L}(S_{T_2}) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{c^2}{n^4\pi^2}\right) Z_n^2\right),\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1)$ である。従って、漸近的な検出力は、それぞれ

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} P(S_{T_1} \geq x_1) &= P\left(Z_1^2 \geq \frac{3x_1}{c^2 + 3c + 3}\right), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} P(S_{T_2} \geq x_2) &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[\frac{1 - e^{-i\theta x}}{i\theta} \phi(\theta) \right] d\theta,\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 x_1 と x_2 は、 $c = 0$ のもとの S_{T_1} と S_{T_2} の極限分布の分位点である。また、 $\phi(\theta)$ は S_{T_2} の極限分布の特性関数であり、

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \left[D\left(i\theta + \sqrt{a(\theta)}\right) D\left(i\theta - \sqrt{a(\theta)}\right) \right]^{-1/2}, \\ D(\lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \quad a(\theta) = -\theta^2 + 2ic^2\theta,\end{aligned}$$

によって与えられる。以上の結果を得るには eigenvalue approach が最も適切である。ただし、(15) のモデルを拡張して、時系列回帰モデルにおける単位根検定を考える場合には、Fredholm approach を使う必要がある。

上で求めた検定のよさを評価する 1 つの方法として、検出力の包絡線 (power envelope) を求めてみよう。そのために、 $H_0 : \alpha = 1$ を $H_1 : \alpha = 1 - (\theta/T)$ に対して検定する最強力不変 (MPI) 検定を考えると、棄却域は次のようになる。

i) の場合

$$V_{T_1}(\theta) = T \frac{y' [C'C - C'(\alpha)C(\alpha)] y}{y' C' C y} > \text{constant},$$

ii) の場合

$$V_{T_2}(\theta) = T \frac{y' [\Omega^{-1} - \Omega^{-1}(\alpha)] y}{y' \Omega^{-1} y} > \text{constant}.$$

ただし、 $\alpha = 1 - (\theta/T)$, $C(\alpha)$ は $T \times T$ の下三角行列であり、 (j, k) 要素は α^{j-k} ($j \geq k$) で与えられる。また、 $\Omega(\alpha)$ は、 (j, j) 要素が $1 + \alpha^2$, $(j, j \pm 1)$ 要素が $-\alpha$, その他が 0 となる $T \times T$ の対称行列である。

与えられた有意水準に対して、 $V_{T_1}(\theta)$ と $V_{T_2}(\theta)$ の有意点を求めることにより、上述の検定が実行される。そして、 α の真の値を $\alpha_0 = 1 - (c/T)$ とするとき、検出力も計算される。特に、 $\theta = c$ として、各 c に対して計算された検出力がすべての

不変検定の検出力の包絡線となる。漸近的には、 $\alpha = 1 - (\theta/T)$ と $\alpha_0 = 1 - (c/T)$ のもとで、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V_{T1}(\theta)) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)dw(s)dw(t) - \theta\right), \\ \mathcal{L}(V_{T2}(\theta)) &\rightarrow \mathcal{L}\left(\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 + c^2}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + \theta^2)} Z_n^2 - \theta\right),\end{aligned}$$

を得る。ただし、 $K(s,t)$ は対称で、 $s \leq t$ のとき

$$K(s,t) = c + c^2(1-t) + (\theta - c)e^{-\theta(t-s)} - \frac{(\theta - c)^2}{\theta} e^{-\theta(1-s)} \sinh \theta(1-t)$$

で定義される。

以上より、有意水準 $100\gamma\%$ のもとでの漸近的な包絡線は、

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} P(V_{T1}(c) \geq x_1) \\ = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \exp\left\{-\frac{iu(c+x_1)}{c^2}\right\}}{iu\sqrt{\cos \nu - \frac{\nu}{c} \sin \nu}} \right] du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} P(V_{T2}(c) \geq x_2) \\ = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \exp\left\{-\frac{iu(c+x_2)}{c^2}\right\}}{iu\sqrt{\frac{\sin \nu}{\nu}}} \right] du,\end{aligned}$$

で計算される (Tanaka (1996, Chap.10))。ここで、 x_1 と x_2 は $V_{T1}(c)$ と $V_{T2}(c)$ の極限帰無分布の上側 $100\gamma\%$ 点であり、 $\nu = \sqrt{2iu}$ である。

図4 LBI 検定の検出力と包絡線

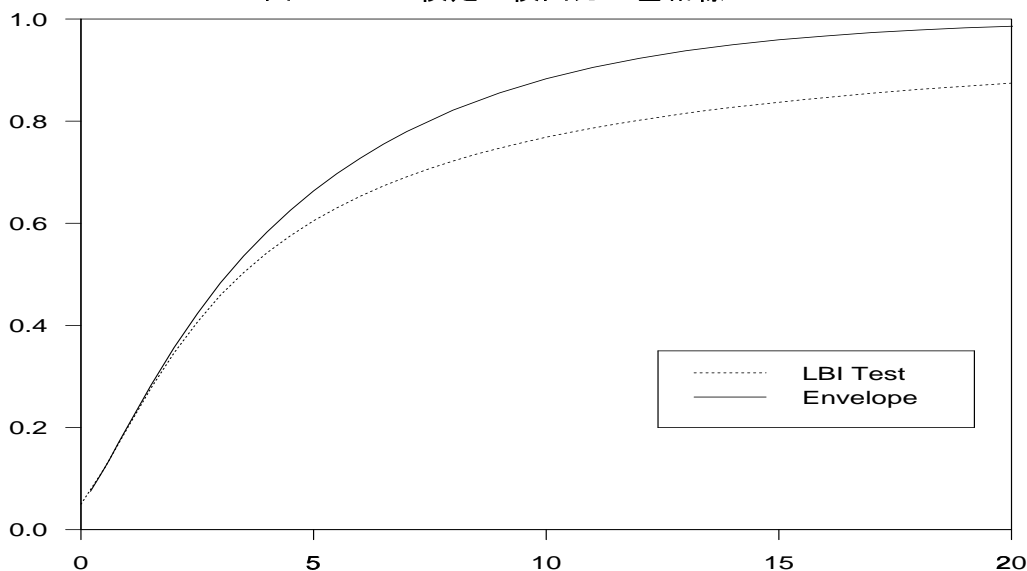
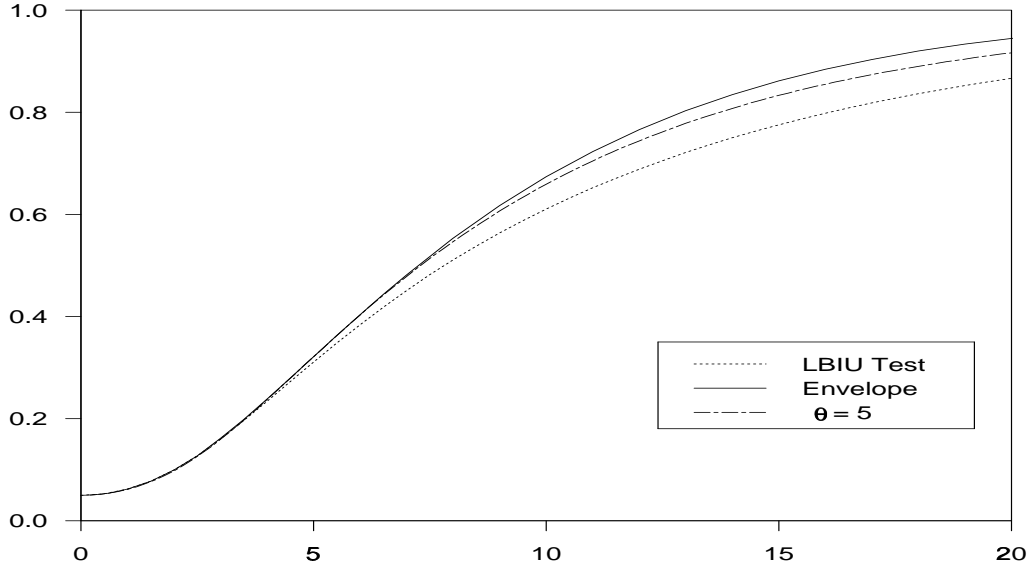


図4は、i) の場合の包絡線と S_{T1} に基づく検定の検出力を図示したものである。図5は、ii) の場合についてのものであるが、さらに、特定の MPI 検定 ($\theta = 5$ における) の検出力も図示してある。この MPI 検定の検出力は、 $c = 5$ の場合には包絡線と一致するもので、全体として LBIU 検定よりもよい検定となっている。

図5 LBIU 検定の検出力と包絡線



2.3. $I(d)$ 過程の統計的推測

L をラグ・オペレータとして、次のモデル

$$(16) \quad (1 - L)^d y_j^{(d)} = u_j = \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_{\ell} \varepsilon_{j-\ell}, \quad (j = 1, \dots, T)$$

を考える。ここで、 $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$, $\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell^d |\phi_{\ell}| < \infty$, $\phi \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_{\ell} \neq 0$ を仮定する。このとき、 $\{u_j\}$ は反転可能な定常過程となり、 $\{y_j^{(d)}\}$ は $I(d)$ 過程と呼ばれる (Engle and Granger (1987))。以下、 d が自然数の場合のみを扱い、 $y_j^{(d)}$ ($j \leq 0$) はすべて 0 であると仮定する。なお、 d が実数の場合には、 $d < 1/2$ ならば $\{y_j^{(d)}\}$ 自体も定常となり、 $d \geq 1/2$ ならば非定常である。

$I(d)$ 過程 $\{y_j^{(d)}\}$ に基づいて、部分和過程

$$Y_T^{(d)}(t) = \frac{1}{T^{d-1/2}} y_j^{(d)} + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j^{(d)} - y_{j-1}^{(d)}}{T^{d-1/2}}$$

を構成すると、次の弱収束が成立する (Chan and Wei (1988))。

$$\mathcal{L} \left(Y_T^{(d)} / \sigma \right) \longrightarrow \mathcal{L} (\phi F_{d-1}) .$$

ここで、 $F_g = \{F_g(t)\}$ は

$$F_g(t) = \int_0^t F_{g-1}(s) ds, \quad (g = 1, 2, \dots), \quad F_0(t) = w(t)$$

により定義されるブラウン運動の g 重積分過程 (g -fold integrated Brownian motion) であり、帰納法により、

$$(17) \quad F_g(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^g}{g!} dw(s), \quad (g = 0, 1, \dots)$$

とも表されることがわかる。 $\{F_g(t)\}$ は g 階微分可能な確率過程であり、 g が大きくなるとサンプル・パスはより滑らかになる。図6は $g = 0$ 、図7は $g = 1, 2$ の場合の $\{F_g(t)\}$ のサンプル・パスを例示したものである。 $\{F_0(t)\}$ はブラウン運動である。

図6 ブラウン運動のサンプル・パス

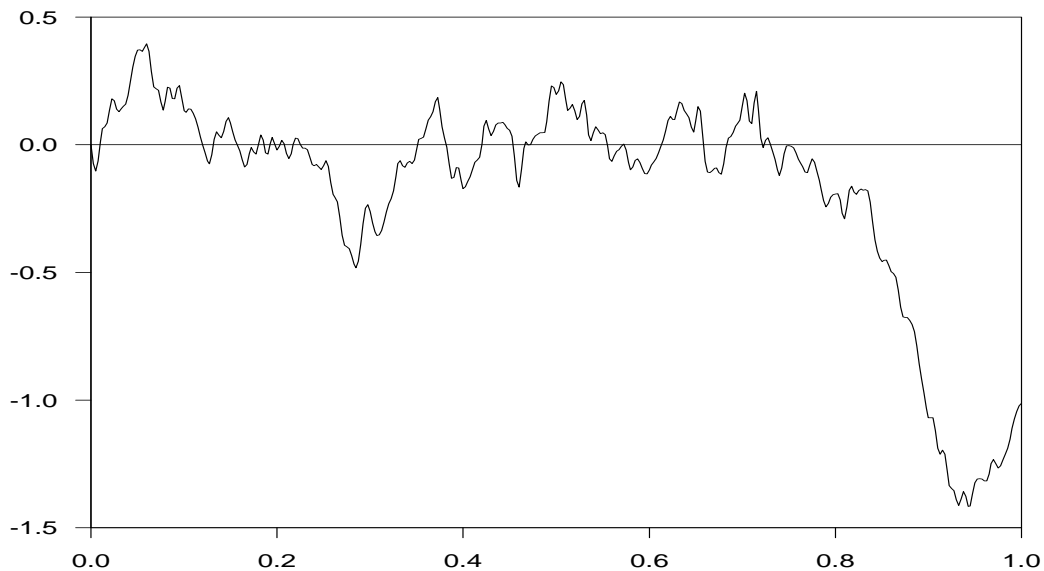
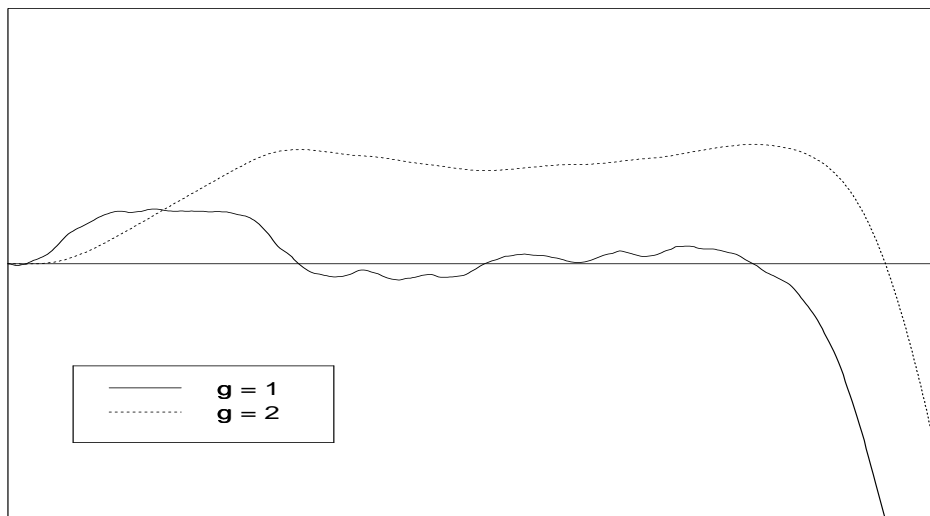


図7 ブラウン運動の1重および2重積分のサンプル・パス



次に、 $\{y_j^{(d)}\}$ の 2 次の標本モーメント

$$S_T^{(d)} = \frac{1}{T^{2d}} \sum_{j=1}^T \left(y_j^{(d)}\right)^2$$

の極限分布を求めよう。CMT と (17) を使って、

$$(18) \quad \mathcal{L} \left(S_T^{(d)} / (\phi\sigma)^2 \right) \longrightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt \right) \\ = \mathcal{L} \left(\int_0^1 \int_0^1 K_{d-1}(s, t) dw(s) dw(t) \right)$$

を得る。ただし、

$$K_g(s, t) = \int_{\max(s, t)}^1 \frac{((u-s)(u-t))^g}{(g!)^2} du$$

である。(18) の極限分布の特性関数は各 d に対して個別に求めざるを得ない。そのためには Fredholm approach により FD を求める方法が一番適用しやすい。しかし、現在のところ、 $d = 3$ までの特性関数しか得られていない (Tanaka (1996, Chap.5))。一般には、 $(2g + 2)$ 階の微分方程式

$$f^{(2g+2)}(t) + (-1)^g \lambda f(t) = 0$$

を、 $(2g + 2)$ 個の境界条件

$$f^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, g), \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad (k = g + 1, g + 2, \dots, 2g + 1)$$

のもとで解いたときの一般解が恒等的には 0 でない条件から FD が求められるはずである。

$K_{d-1}(s, t)$ の FD を $D_{d-1}(\lambda)$ とするとき、次の結果を得る。

$$D_0(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}, \\ D_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} \right), \\ D_2(\lambda) = \frac{1}{9} \left[2 \left(1 + \cos \lambda^{1/6} + \cos \lambda^{1/6} \omega + \cos \lambda^{1/6} \omega^2 \right) \right. \\ \left. + \cos \lambda^{1/6} \cos \lambda^{1/6} \omega \cos \lambda^{1/6} \omega^2 \right].$$

ここで、 $\omega = (1 + \sqrt{3}i)/2$ である。特性関数 $(D_{d-1}(2i\theta))^{-1/2}$ を反転することにより、(18) の極限分布の分布関数や密度関数が求められる。図 8、9 は、それぞれ $d = 2, 3$ の場合の密度関数である。なお、 $d = 1$ の場合の密度は図 1 に示されたものである。図 8、9 には、極限密度関数の近似密度も描かれている。ここで考えられている近似は、 $\lambda_n(d-1)$ を $K_{d-1}(s, t)$ の第 n 番目に小さい固有値とするとき、Mercer の定理を使って

$$\mathcal{L} \left(\int_0^1 \int_0^1 K_{d-1}(s, t) dw(s) dw(t) \right) = \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(d-1)} Z_n^2 \right) \\ \cong \mathcal{L} \left(\frac{1}{\lambda_1(d-1)} Z_1^2 \right)$$

とするものである。ここで、 $\lambda_1(d-1)$ は $D_{d-1}(\lambda) = 0$ の最小解であり、数値計算から、 $\lambda_1(1) = 12.36236$, $\lambda_1(2) = 121.259$ を得る。なお、 $d = 1$ の場合には、 $\lambda_1(0) = \pi^2/4 = 2.4674$ であるが、最小固有値のみの近似は当然ながら不十分である。

図 8 $\int_0^1 \left(\int_0^t w(s) ds \right)^2 dt$ の密度関数

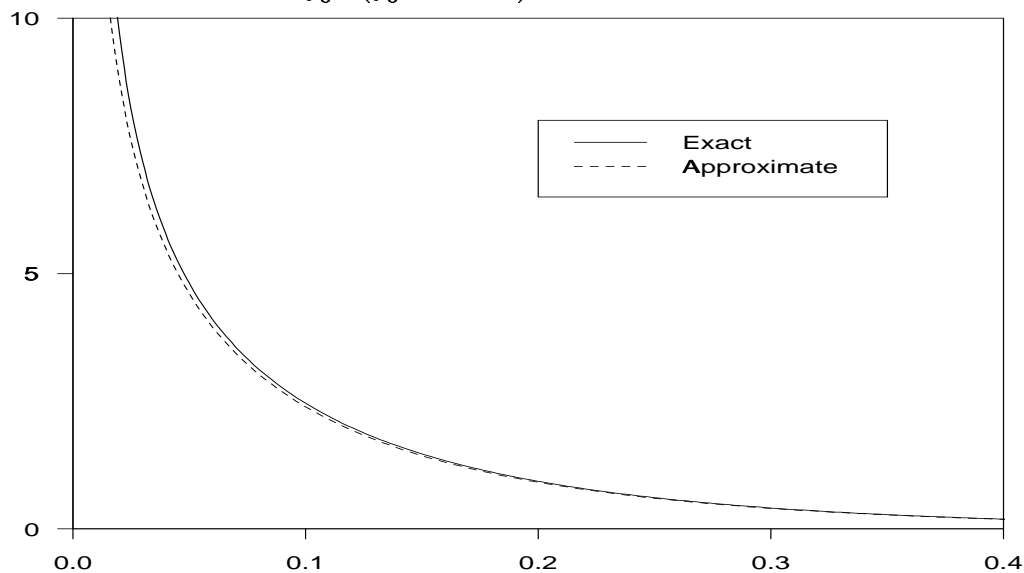
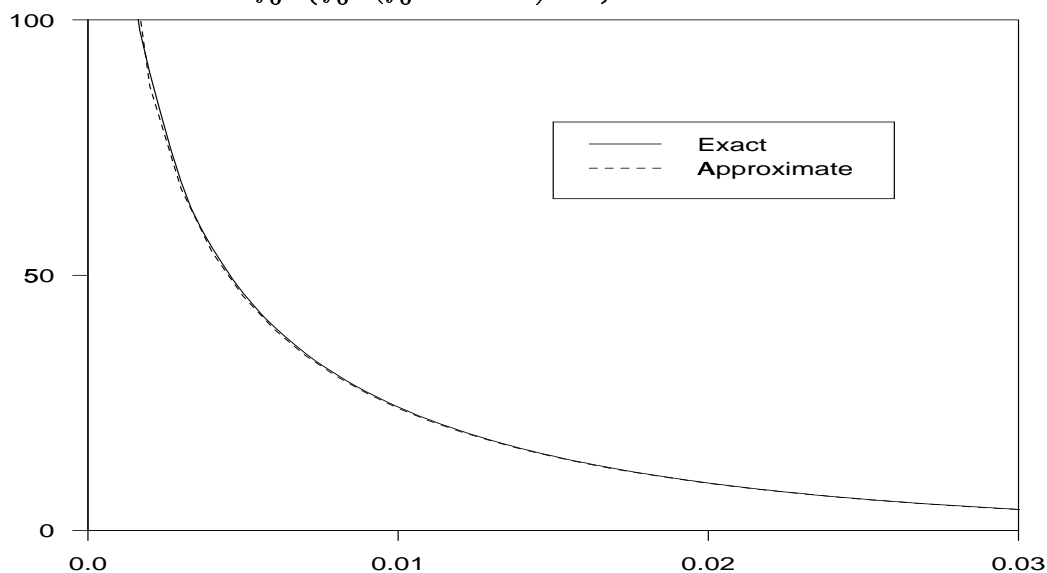


図 9 $\int_0^1 \left\{ \int_0^t \left(\int_0^s w(r) dr \right) ds \right\}^2 dt$ の密度関数



2.4. 共和分係数の推定量

今までは単一の確率過程のみを扱ってきたが、ここでは複数の確率過程が結合された場合を考える。例えば、 $\{x_j\}$ と $\{y_j\}$ を $I(1)$ 過程とするとき、これらの線形結合も、一般には $I(1)$ である。しかし、ある条件をみたす場合には定常となるような線形結合が存在する (Engle and Granger (1987))。このとき、 $\{x_j\}$ と $\{y_j\}$ は共和分関係にあるといい、モデル

$$(19) \quad \begin{cases} y_j = \beta x_j + v_j, & (j = 1, \dots, T), \\ x_j = x_{j-1} + u_j, & x_0 = 0 \end{cases}$$

を共和分モデルという。最初の方方程式だけを取り上げると回帰モデルに他ならないが、2本目の方程式があるために、全体として計量経済学における同時方程式モデルとなっている。

ここでの問題は、(19) に現れている共和分係数 β の推定量の分布を導出することである。以下、簡単のため、 $\{u_j\}$ も $\{v_j\}$ も独立過程とし、 $\varepsilon_j = (u_j, v_j)' \sim \text{NID}(0, \Sigma)$ と仮定する。そして、 β の推定量として、次の3つのものを考える。

- $\hat{\beta}_{OLS}$: 通常の LSE であり、(19) の第2の方方程式を無視した推定量；
- $\hat{\beta}_{2SLS}$: 2段階 LSE であり、まず、 x_j を x_{j-1} に回帰して x_j の内挿値 \hat{x}_j を求め、次に y_j を \hat{x}_j に回帰して得られる推定量；
- $\hat{\beta}_{ML}$: モデル (19) に対する最尤推定量。

このとき、次の結果が得られる (Tanaka (1996, Chap.11))。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T(\hat{\beta}_{OLS} - \beta)) &\longrightarrow \mathcal{L}(V^{-1}(U_1 + U_2 + \Sigma_{12})), \\ \mathcal{L}(T(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta)) &\longrightarrow \mathcal{L}(V^{-1}(U_1 + U_2)), \\ \mathcal{L}(T(\hat{\beta}_{ML} - \beta)) &\longrightarrow \mathcal{L}(V^{-1}U_2). \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} U_1 &= \Sigma_{11}^{1/2} \int_0^1 w_1(t) dw_1(t) \Sigma_{11}^{-1/2} \Sigma_{12}, \\ U_2 &= \Sigma_{11}^{1/2} \int_0^1 w_1(t) dw_2(t) (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{1/2}, \\ V &= \Sigma_{11}^{1/2} \int_0^1 w_1^2(t) dt \Sigma_{11}^{1/2}, \\ w(t) &= (w_1(t), w_2(t))' = 2 \text{次元の標準ブラウン運動} \end{aligned}$$

である。3つの極限分布は、 $\Sigma_{12} = 0$ ならば同一となる。

極限分布を計算するために、例えば $\hat{\beta}_{OLS}$ を考えると、 $P(T(\hat{\beta}_{OLS} - \beta) \leq x) \rightarrow P(X \geq 0)$ において、

$$\begin{aligned} X &= a^2 x \int_0^1 w_1^2(t) dt - ab \int_0^1 w_1(t) dw_1(t) - ac \int_0^1 w_1(t) dw_2(t) - d, \\ a &= \Sigma_{11}^{1/2}, \quad b = \Sigma_{11}^{-1/2} \Sigma_{12}, \quad c = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{1/2}, \quad d = \Sigma_{12} \end{aligned}$$

より、 X の m.g.f. は条件つき議論と Fredholm approach を使って、

$$E\left(e^{\theta X}\right) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(ab - 2d)\right\} \left[\cos \nu + ab\theta \frac{\sin \nu}{\nu}\right]^{-1/2}$$

となる (Tanaka (1990b))。ただし、 $\nu = \sqrt{a^2\theta(2x + c^2\theta)}$ である。同様にして、 $\hat{\beta}_{2SLS}$ と $\hat{\beta}_{ML}$ に関連する m.g.f. も導出され、これらを反転することにより、極限分布が計算される。

さらに、極限分布の平均と分散は次の通りである (Tanaka (1993))。

$$\begin{aligned} \mu_{OLS} &= \frac{\Sigma_{12}}{2\Sigma_{11}}(c_1 + 2), & \sigma_{OLS}^2 &= \sigma_1^2 + \frac{\Sigma_{12}^2}{8\Sigma_{11}^2}(c_2 - 2c_1^2 + 2c_1 - 4), \\ \mu_{2SLS} &= \frac{\Sigma_{12}}{2\Sigma_{11}}(-c_1 + 2), & \sigma_{2SLS}^2 &= \sigma_1^2 + \frac{\Sigma_{12}^2}{8\Sigma_{11}^2}(c_2 - 2c_1^2 + 2c_1 - 4), \\ \mu_{ML} &= 0, & \sigma_{ML}^2 &= \sigma_1^2. \end{aligned}$$

ただし、 $\sigma_1^2 = c_1 \left(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right) / \Sigma_{11}$,

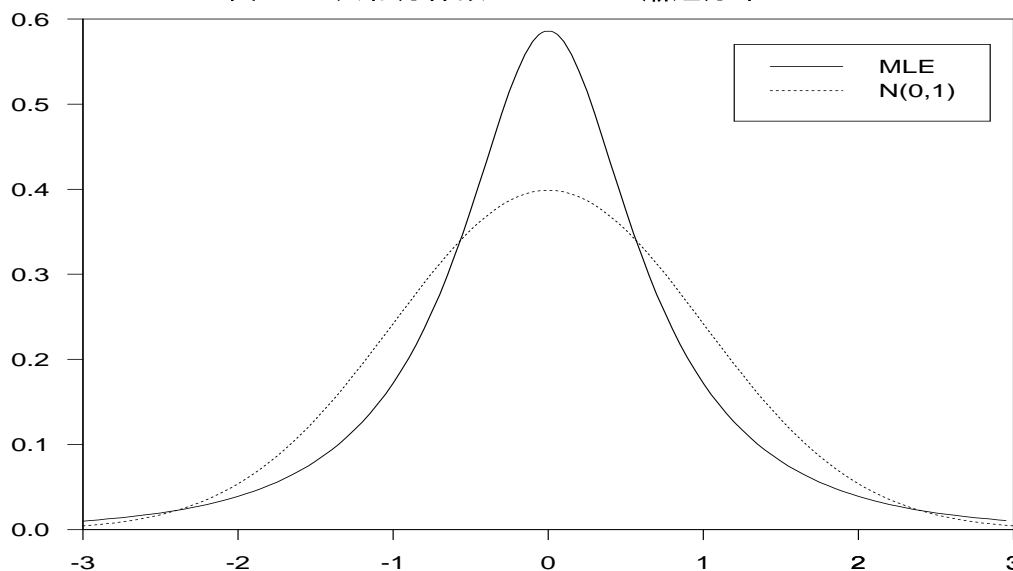
$$c_1 = \int_0^\infty \frac{u}{\sqrt{\cosh u}} du = 5.5629,$$

$$c_2 = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{\cosh u}} du = 135.6625.$$

モーメントの値から、 Σ_{12} が正ならば、OLS 推定量は上方へのバイアス、2SLS 推定量は下方へのバイアスをもつことがわかる。 $\hat{\beta}_{OLS}$ と $\hat{\beta}_{2SLS}$ は同一の分散をもつが、MSE の観点からは 2SLS の方がよい。しかし、これらは一般に $\hat{\beta}_{ML}$ よりも劣る。

図 10 には、 $T(\hat{\beta}_{ML} - \beta) / \sigma_1$ の極限分布の密度関数と $N(0,1)$ の密度関数を示してある。いずれの分布も平均 0、分散 1、歪み 0 である。尖りは、前者は 6.576、後者は 3 である。 $\hat{\beta}_{OLS}$ や $\hat{\beta}_{2SLS}$ の極限分布は図示していないが、一般には非対称で、 $\hat{\beta}_{ML}$ よりも分散が大きくなる。

図 10 共和分係数の MLE の漸近分布



参考文献

- Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1952). "Asymptotic theory of certain 'goodness of fit' criteria based on stochastic processes," *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 193-212.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York.
- Bobkoski, M.J. (1983). "Hypothesis testing in nonstationary time series," Ph.D. Thesis, University of Wisconsin.
- Brown, B.M. (1971). "Martingale central limit theorems," *Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 59-66.
- Chan, N.H. and Wei, C.Z. (1988). "Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes," *Annals of Statistics*, **16**, 367-401.
- Courant, R. and Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics, Vol. I*, Wiley, New York.
- Davis, R.A. and Dunsmuir, W.T.M. (1996). "Maximum likelihood estimation for MA(1) processes with a root on or near the unit circle," *Econometric Theory*, **12**, 1-29.
- Donsker, M.D. (1951). "An invariance principle for certain probability limit theorems," *Memoires of the American Mathematical Society*, **6**, 1-12.
- Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1987). "Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing," *Econometrica*, **55**, 251-276.
- Erdős, P. and Kac, M. (1946). "On certain limit theorems of the theory of probability," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52**, 292-302.
- Girsanov, I.V. (1960). "On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures," *Theory of Probability and Its Applications*, **5**, 285-301.
- Hall, P. and Heyde, C.C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Application*, Academic Press, New York.
- Hochstadt, H. (1973). *Integral Equations*, Wiley, New York.
- Jeganathan, P. (1991). "On the asymptotic behavior of least-squares estimators in AR time series with roots near the unit circle," *Econometric Theory*, **7**, 269-306.

- Johansen,S. (1988). “Statistical analysis of cointegrating vectors,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 231-254.
- Johansen,S. (1991). “Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive model,” *Econometrica*, **59**, 1551-1580.
- Liptser,R.S. and Shirayayev,A.N. (1977). *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Liptser,R.S. and Shirayayev,A.N. (1978). *Statistics of Random Processes II: Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Nabeya,S. and Tanaka,K. (1988). “Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative,” *Annals of Statistics*, **16**, 218-235.
- Nabeya,S. and Tanaka,K. (1990a). “A general approach to the limiting distribution for estimators in time series regression with nonstable autoregressive errors,” *Econometrica*, **58**, 145-163.
- Nabeya,S. and Tanaka,K. (1990b). “Limiting powers of unit-root tests in time-series regression,” *Journal of Econometrics*, **46**, 247-271.
- Phillips,P.C.B. (1978). “Edgeworth and saddlepoint approximations in the first-order noncircular autoregression,” *Biometrika*, **65**, 91-98.
- Phillips,P.C.B. (1987a). “Time series regression with a unit root,” *Econometrica*, **55**, 277-301.
- Phillips,P.C.B. and Solo,V. (1992). “Asymptotics for linear processes,” *Annals of Statistics*, **20**, 971-1001.
- Tanaka,K. (1990a). “The Fredholm approach to asymptotic inference on non-stationary and noninvertible time series models,” *Econometric Theory*, **6**, 411-432.
- Tanaka,K. (1990b). “Testing for a moving average unit root,” *Econometric Theory*, **6**, 433-444.
- Tanaka,K. (1993). “An alternative approach to the asymptotic theory of spurious regression, cointegration, and near cointegration,” *Econometric Theory*, **9**, 36-61.
- Tanaka,K. (1996). *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*, Wiley, New York.