宿題解答 (第 3 章)

[問 3]

$$
\begin{aligned}
\text{ラスパイレス物価指数} &= \frac{\sum_i p_{1i}q_{0i}}{\sum_i p_{0i}q_{0i}} \\
&= \frac{500\times 1000 + 700\times 2000 + 1200\times 500}{300\times 1000 + 500\times 2000 + 1000\times 500} \\
&= 139\%
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{パーシェ物価指数} &= \frac{\sum_i p_{1i}q_{1i}}{\sum_i p_{0i}q_{1i}} \\
&= \frac{500\times 1500 + 700\times 2800 + 1200\times 600}{300\times 1500 + 500\times 2800 + 1000\times 600} \\
&= 140\%
\end{aligned}
$$

[問 4]

加重平均は次式のかたちで定義される.

$$\text{加重平均} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i,$$

ここで, w_i は非負値であり, 総和は 1 である.
まず, $(2m+1)$ 項移動平均を考える.

$$(2m+1)\ \text{項移動平均} = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=-m}^{m} x_{t+i}$$

となるので,

$$w_i = \frac{1}{2m+1} > 0, \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m)$$

とすると,

$$\sum_{i=-m}^{m} w_i = (2m+1)\times\frac{1}{2m+1} = 1$$

となる. よって, $(2m+1)$ 項移動平均は加重平均の特殊な場合であることがわかる.
　一方, 中心化 $2m$ 項移動平均を考えてみると,

$$\text{中心化}\ 2m\ \text{項移動平均} = \frac{1}{4m}(x_{t-m} + x_{t+m}) + \frac{1}{2m}\sum_{i=-m+1}^{m-1} x_{t+i}$$

であるので,

$$w_{-m} = w_m = \frac{1}{4m},$$

$$w_i = \frac{1}{2m} > 0, \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(m-1))$$

とすると,

$$\sum_{i=-m}^{m} w_i = 2 \times \frac{1}{4m} + \frac{1}{2m} \times (2m-1) = 1$$

となることがわかる. したがって，中心化 $2m$ 項移動平均も加重平均の特殊な場合である.

[問 **6**]

受験者数が n の場合, 次の結果が得られたとする.

投票番号	0	1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	$n-1$	n
票数	V_0	V_1	V_2	$\ldots$	V_i	$\ldots$	V_{n-1}	V_n
累積票数	V_0	V_0+V_1	$V_0+V_1+V_2$	$\ldots$	$\sum_{j=0}^{i} V_j$	$\ldots$	$\sum_{j=0}^{n-1} V_j$	$\sum_{j=0}^{n} V_j$

ここで, $\sum_{j=0}^{n} V_j = 67$. メディアンまでを合格とする方式で, 上位 i 位までの受験者を合格させることにすると,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} V_j < \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} V_j = 33.5 \\ \sum_{j=0}^{i} V_j > \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} V_j = 33.5, \end{cases}$$

即ち,

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} V_j \leq 33 \\ \sum_{j=0}^{i} V_j \geq 34. \end{cases}$$

となる. 一方, 受験者一人ずつを合否の投票にかける場合, 上の結果から, 以下のように復元することができる.

順位成績	1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	$n-1$	n
{ 合格 } 票	$\sum_{j=1}^{n} V_j$	$\sum_{j=2}^{n} V_j$	$\ldots$	$\sum_{j=i}^{n} V_j$	$\ldots$	$\sum_{j=n-1}^{n} V_j$	V_n
{ 不合格 } 票	V_0	$\sum_{j=0}^{1} V_j$	$\ldots$	$\sum_{j=0}^{i-1} V_j$	$\ldots$	$\sum_{j=0}^{n-2} V_j$	$\sum_{j=0}^{n-1} V_j$

このとき, 上位 i 位の受験者の" 合格" 票数は $\sum_{j=i}^{n} V_j$ で, $\sum_{j=0}^{i-1} V_j \leq 33$ より, $\sum_{j=i}^{n} V_j \geq 34$ であることがわかる. そして, 上位 $i+1$ 位の受験者の" 合格" 票数は $\sum_{j=i+}^{n} V_j$ で, $\sum_{j=0}^{i} V_j \geq 34$ より, $\sum_{j=i+1}^{n} V_j \leq 33$ となる. 多数決によって, 上位 i 位までの受験者が合格になる.

これは, 二つの方法が同じ結果をもたらすことを意味する.

[問 **11**]

$$
\begin{aligned}
A(i) &= \{i : |x_i - \bar{x}| \geq k s_x\}, \\
B(i) &= \{i : |x_i - \bar{x}| < k s_x\}
\end{aligned}
$$

とすると,

$$
\begin{aligned}
(n-1)s_x^2 &= \Big(\sum_{A(i)} + \sum_{B(i)}\Big)(x_i - \bar{x})^2 \\
&\geq \sum_{A(i)} (x_i - \bar{x})^2 \\
&\geq \sum_{A(i)} k^2 s_x^2 \\
&= n_k k^2 s_x^2
\end{aligned}
$$

が成り立つので,

$$
\frac{1}{k^2} \geq \frac{n_k}{n-1} > \frac{n_k}{n}
$$

を得る. よって, チェビシェフの不等式が証明された.

[問 **13**]

ヒストグラムを作成する場合の各階級の下限と上限を見てみよう.

	$y_i(= 50 + 10z_i)$ に対して	$z_i(= (x_i - \bar{x})/s_x)$ に対して	x_iに対して
図 2-3			[-15, -10) [-10, -5) [-5, 0) [0, 5) [5, 10) [10, 15)
図 3-4		[-3, -2) [-2, -1) [-1, 0) [0, 1) [1, 2) [2, 3)	[-16.00, -10.88) [-10.88, -5.76) [-5.76, -0.63) [-0.63, 4.50) [4.50, 9.62) [9.62, 14.74)
図 3-5	[20, 30) [30, 40) [40, 50) [50, 60) [60, 70) [70, 80)	[-3, -2) [-2, -1) [-1, 0) [0, 1) [1, 2) [2, 3)	[-16.00, -10.88) [-10.88, -5.76) [-5.76, -0.63) [-0.63, 4.50) [4.50, 9.62) [9.62, 14.74)

図 3-4 と図 3-5 の x_iに対する各階級の下限と上限が一致するので, 形状も同一である. また, 図 2-3 の x_iに対する各階級の下限と上限は, 図 3-4 及び図 3-5 と違うので, 形状も異なる.

[**問 14**]

	範囲 $\max\{x_i\} - \min\{x_i\}$	**平均** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	**標準偏差** $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$	**変動係数** $s_x/\bar{x}$
A	21	138.4	5.91	0.0427
B	27	171.1	7.22	0.0422

変動係数の観点から, データ A の方がばらつきが大きいと言える.