

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	物理数学 1	2005 年 7 月 15 日	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと (6 の (a) とかはいいけど)。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日的答案にはさんで提出すること。

1. γ, N_1 を正の定数とする。 $t \geq 0$ の範囲で、微分方程式

$$\frac{d}{dt}N(t) = \begin{cases} -\gamma & N(t) \geq N_1 \\ -\frac{\gamma}{N_1} N(t) & N(t) \leq N_1 \end{cases} \quad (1)$$

を解け。ただし、初期条件は $N(0) > N_1$ を満たすとし、解は $N(0)$ を用いて表せ。

2. m, k, α, γ を正の定数とする。常微分方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) + \alpha e^{\gamma t} \quad (2)$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) 対応する斉次の常微分方程式 $m \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t)$ の一般解を求めよ。

(b) (2) の特解で $x_p(t) = Ae^{\gamma t}$ と書けるものを求めよ (A は求めるべき定数)。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (2) の解になっていることを確かめよ。

3. $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を三次元空間のベクトルとする。

(a) 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ をそれぞれ成分で表せ。

(b) 上の成分表示を用いて、スカラー三重積についての等式 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ を証明せよ。

4. $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}, B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}, C = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ を d 次の正方行列とするとき、 $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことを証明せよ。

5. 任意の d 個の実数 a_1, \dots, a_d が与えられたとき、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{d-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

という d 次の正方行列をつくる。右上から左下にむかう対角線上のみに 0 でない要素が並んでいる (念のために成分を式で書けば、 $j = d - i + 1$ のとき $(A)_{i,j} = a_i$ であり、それ以外については $(A)_{i,j} = 0$ ということ)。この行列のディターミナントが

$$\det[A] = \begin{cases} (-1)^{d/2} a_1 a_2 \cdots a_d & d \text{ が偶数} \\ (-1)^{(d-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_d & d \text{ が奇数} \end{cases} \quad (4)$$

であることを示せ。

6. 計算せよ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} & \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -11 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (x \ y \ z) \end{aligned}$$

7. ディターミナントを求めよ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$