

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2006年7月21日	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。2007年3月を過ぎたら、答えは予告なく廃棄する。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日的答案には喜んで提出すること。

1. m, ω, f_0 を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \begin{cases} f_0 \sin(\omega t) & 0 \leq t \leq \pi/\omega \\ 0 & t \geq \pi/\omega \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. α, γ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\gamma x(t) + \alpha t^2 \quad (1)$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) 対応する斉次の常微分方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma x(t)$ の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\text{ps}}(t) = At^2 + Bt + C$ と書けるものを求めよ (A, B, C は求めるべき定数)。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (1) の解になっていることを確かめよ。

3. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。解は、初期値 $x(0)$ を使って表すこと。以下で a, b, ω は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cos(\omega t) \{x(t) + b\}$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a t^2 \{1 + \{x(t)\}^2\}$$

4. α, β を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t x(t) + \beta t^2 \exp\left[\frac{\alpha}{2}t^2\right]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

- (a) 解を $x(t) = C(t) \exp[(\alpha/2)t^2]$ という形に書き、 $C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。
- (b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。

5. $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ とする。

- (a) 外積 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ を成分で表せ。
- (b) 外積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を成分で表せ。
- (c) この場合に、ベクトル三重積の公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ が成り立つことを示せ。

6. 計算せよ (i は純虚数)。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3i & 2 \\ i & 5 & i \\ 4 & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. d 次の正方行列 A, B について $\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$ が成り立つことを証明せよ。