試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2007 年 7 月	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。2008 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分することがある。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. m, ω, f_0 を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \begin{cases} f_0 \cos(\omega t), & 0 \le t \le \pi/(2\omega) \\ 0, & t \ge \pi/(2\omega) \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. ω, α, γ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\gamma\, x(t) + \alpha \cos(\omega t) \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) 対応する斉次の常微分方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t)$ の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ と書けるものを求めよ（A, B は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (1) の解になっていることを確かめよ。

3. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。解は、初期値 $x(0)$ を使って表すこと。以下で α, ω は正の定数。また (a) では $x(t) > 0$ とせよ。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \{x(t)\}^{-2}$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \cos(\omega t) \{1 + \{x(t)\}^2\}$$

4. α, β, ω を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。

5. $\boldsymbol{a} = (a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$, $\boldsymbol{b} = (b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ を三次元空間のベクトルとする。

(a) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ をそれぞれ成分で表せ。

(b) 上の成分表示を用いて、スカラー三重積についての等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ を証明せよ。

6. 計算せよ。

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

7. $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を任意の複素 $d\times d$ 行列とする。$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}]$ を成分 $a_{i,j}$ を使って表し、この量が 0 以上であることを示せ。