試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2008 年 7 月 25 日	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。2009 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分することがある。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. $m > 0,\ t_0 > 0,\ f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\,(t_0 - t), & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t \ge t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. $\omega > 0,\ \alpha,\ k > 0$ を実定数とする。常微分方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -k\,x(t) + \alpha\,t^2 \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

(b) 微分方程式 (1) の特解を求めよ（簡単な形をしている）。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (1) の解になっていることを確かめよ。

3. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。以下で $\alpha,\ \beta$ は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\frac{t^2}{x(t)} \quad \text{ただし } t > 0,\ x(t) > 0$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,e^{\beta t}\,\{1 + \{x(t)\}^2\}$$

4. α, β を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t\, x(t) + \beta\, t\, \exp\left[\frac{\alpha}{2} t^2\right]$$

の一般解を求めよ（解を $x(t) = C(t)\, \exp[(\alpha/2)\, t^2]$ の形に仮定するとよい）。

5. $\boldsymbol{a} = (0, 0, a)$, $\boldsymbol{b} = (b_\mathrm{x}, b_\mathrm{y}, b_\mathrm{z})$, $\boldsymbol{c} = (c_\mathrm{x}, c_\mathrm{y}, c_\mathrm{z})$ とする。

(a) 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を成分で表せ。

(b) 外積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を成分で表せ。

(c) この場合に、ベクトル三重積の公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ。

6. 計算せよ。

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -11 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\text{(e)} \quad \det\left[\begin{pmatrix} \cos\varphi\, \cos\theta & -\cos\varphi\, \sin\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\, \cos\theta & \sin\varphi\, \sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\right] \tag{2}$$

7. $d \times d$ 行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ の成分は、$i < j$ なら $a_{i,j} = 0$ である（つまり A は下三角）。定義に基づいて $\det[\mathsf{A}]$ を求めよ（答えだけでは点は与えない）。