試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2009 年 7 月 24 日	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2010 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. $m > 0$, $t_0 > 0$, γ, f_0 を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\left\{1 - e^{\gamma(t-t_0)}\right\}, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t \ge t_0 \end{cases} \tag{1}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. γ, α, ω を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha\,\cos(\omega t) \tag{2}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として $x(0)$ とを使え。

(b) 微分方程式 (2) の特解を求めよ。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (2) の解になっていることを確かめよ。

3. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。以下で α, β は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\frac{e^{\beta t}}{\{x(t)\}^2} \tag{3}$$

(b)
$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t^2 \left\{1 + \{x(t)\}^2\right\} \tag{4}$$

4. α, β, ω を定数とし、常微分方程式
$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)] \tag{5}$$
を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(5) の一般解を求めよ。

5. $\boldsymbol{a} = (a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$, $\boldsymbol{b} = (b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ を任意の 3 次元の（幾何）ベクトルとする。

(a) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を成分を用いて表せ。

(b) 上の成分表示を用いて、$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2$ の関係を証明せよ。

6. 計算せよ。

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}\,i & 2+\sqrt{3}\,i & 2-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3}\,i \\ 4+\sqrt{3}\,i \\ 1-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \det\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\right]$$

7. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を任意の（複素数を成分にもつ）d 次元の列ベクトル、A を任意の（複素数を成分にもつ）$d\times d$ 行列とするとき、
$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right\rangle \tag{6}$$
が成り立つことを証明せよ。