試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2010 年 7 月 23 日	金	3	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2011 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。** レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. $m > 0,\, t_0 > 0,\, \gamma > 0,\, f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0, & 0 \le t \le t_0 \\ f_0\, e^{-\gamma(t-t_0)}, & t \ge t_0 \end{cases} \tag{1}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. α, β を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = \alpha\, x(t) + \beta\, e^{2\alpha t} \tag{2}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として $x(0)$ を使え。

(b) 微分方程式 (2) の特解として、$x_{\mathrm{ps}}(t) = A\, e^{2\alpha t}$ という形のものを求めよ（ただし、A は決めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (2) の解になっていることを確かめ、(2) の一般解を求めよ。任意定数として $x(0)$ を使え。

3. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。以下で α, β は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, \{x(t)\}^2\, \cos(\beta t) \tag{3}$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, e^{\beta t}\,\{1 + \{x(t)\}^2\} \tag{4}$$

4. α, β, γ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t\, x(t) + (\beta + \gamma t)\ \exp\!\left[\frac{\alpha}{2}\, t^2\right] \tag{5}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\ \exp[(\alpha/2)\, t^2]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(5) の一般解を求めよ。任意定数を $x(0)$ によって表せ。

5. 3 次元の（幾何）ベクトル $\boldsymbol{a} = (0, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, 0, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, 0)$ について、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を計算し、両者が一般に一致するかどうかを調べよ。

6. 計算せよ。

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 2+3\sqrt{3}\,i & 1+\sqrt{3}\,i & 1-2\sqrt{3}\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3}\,i \\ 4+\sqrt{3}\,i \\ 1-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \det\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

7. A, B を任意の（複素数を成分にもつ）$d \times d$ 行列とするとき、

$$(\mathsf{AB})^\dagger = \mathsf{B}^\dagger \mathsf{A}^\dagger \tag{6}$$

が成り立つ。両辺の成分表示を一般的に書き下すことで、これを証明せよ。