試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2011 年 7 月 20 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2012 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0.　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1.　m, ω, f_0 を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\,\sin(\omega t), & 0 \le t \le \pi/\omega \\ 0, & t \ge \pi/\omega \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2.　α, γ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha\,t^2 \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) 対応する斉次の常微分方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma\,x(t)$ の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\rm ps}(t) = A\,t^2 + B\,t + C$ と書けるものを求めよ（A, B, C は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足したものが (1) の解になっていることを確かめよ。

3.　以下の常微分方程式の一般解を求めよ。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。以下で α, β は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha\,\cos(\beta t)}{\{x(t)\}^2} \quad \text{(ただし、}x(t) > 0\text{)} \tag{2}$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t\, \{1 + \{x(t)\}^2\} \tag{3}$$

4.　α, β, ω を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, \cos(\omega t)\, x(t) + \beta\, t\, \exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\, \sin(\omega t)]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\, \exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\, \sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

5.　3 次元の（幾何）ベクトル $\boldsymbol{a} = (0, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, 0, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, 0)$ について、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を求めよ。さらに $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ と $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$ を求め、両者が一致するかどうかを調べよ。

6.　計算せよ。

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5}\,i & 1+\sqrt{5}\,i & 1-2\sqrt{5}\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5}\,i \\ 1+\sqrt{5}\,i \\ 1-\sqrt{5}\,i \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \epsilon \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \det\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\right]$$

7.　A, B を任意の（複素数を成分にもつ）$d \times d$ 行列とし、それぞれの i, j 成分を $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ と書く。積 $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$ の i, j 成分をもとの行列の成分と和の記号を使って表わせ。その結果を利用して、等式

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}\,\mathsf{B}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{B}\,\mathsf{A}] \tag{4}$$

を証明せよ。