

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2012年7月27日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2013年1月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

**0. これは冒頭に書くこと。** レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

**1.**  $m, \alpha, t_0$  を正の定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として  $x(0)$  と  $v(0) := \dot{x}(0)$  を使え。

**2.**  $\gamma, \alpha, \omega$  を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\gamma x(t) + \alpha \sin(\omega t) \quad (1)$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

- (a)  $\alpha = 0$  とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。
- (b) 微分方程式 (1) の特解で  $x_{\text{ps}}(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$  と書けるものを求めよ ( $A, B$  は求めるべき定数)。
- (c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値  $x(0)$  を用いて表わせ。

**3.**  $\alpha, \beta$  を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ ((a) では  $x(t) > 0$ 、(b) では  $x(t) > \beta$  とする)。任意定数として初期値  $x(0)$  を使え。

$$(a) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha \cos(\beta t)}{x(t)} \quad (b) \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha t x(t) \{x(t) - \beta\} \quad (2)$$

4.  $\alpha, \beta$  を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t x(t) + \beta t \exp\left[\frac{\alpha}{2}t^2\right]$$

の一般解を次の手順（定数変化法）で求めよ。

(a) 解を  $x(t) = C(t) \exp[(\alpha/2)t^2]$  という形に書き、 $C(t)$  が満たす微分方程式を求めよ。

(b)  $C(t)$  についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値  $x(0)$  で表わせ。

5. 3次元の（幾何）ベクトル  $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, 0, 0)$  について、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  と  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  を計算し、両者が一般に一致するかどうかを調べよ。

6. 計算せよ。

(a)  $(\sqrt{3} + 3i \quad 1 + \sqrt{3}i \quad 1 - 2\sqrt{3}i) \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  (c)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (\gamma \quad \delta \quad \epsilon)$  (e)  $\det \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \right]$

7.  $A, B, C$  を（複素数を成分にもつ）任意の  $d \times d$  行列とし、それぞれの  $i, j$  成分を  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$  と書く。積  $AB$  の  $i, j$  成分をもとの行列の成分と和の記号を使って表わせ。また、 $(AB)C$  の  $i, j$  成分をもとの行列の成分と和の記号を使って表わせ。

$A(BC)$  についても同様の考察をし、等式

$$(AB)C = A(BC) \tag{3}$$

が成り立つことを証明せよ。