| 試験問題 | | 試験日 | 曜日 | 時限 | 担当者 |
|---|---|---|---|---|---|
| 科目名 | 数学 II | 2013 年 7 月 26 日 | 金 | 2 | 田崎 |

**答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2014 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。**

**0.**　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

**1.**　$m>0,\, t_0>0,\, f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\begin{cases}f_0\,(t_0-t), & 0\le t\le t_0\\ 0, & t\ge t_0\end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0):=\dot{x}(0)$ を使え。

**2.**　$\omega>0,\, \alpha,\, \beta$ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\omega^2\,x(t)+\alpha\,e^{\beta t} \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha=0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ（二階の常微分方程式なので任意定数が二つ必要なことに注意）。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\rm ps}(t)=A\,e^{\beta t}$ と書けるものを求めよ（$A$ は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0),\, v(0):=\dot{x}(0)$ を用いて表わせ。

**3.**　$\alpha,\, \beta$ を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t)>0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\frac{\alpha\,\sin(\beta t)}{x(t)} \qquad \text{(b)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\alpha\,e^{\beta t}\left(1+\{x(t)\}^2\right) \tag{2}$$

**4.**　$\alpha, \beta, \omega$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)] \tag{3}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(3) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

**5.**　3 次元の（幾何）ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0)$, $\boldsymbol{c} = (0, c_2, c_3)$ について、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を計算し、両者が一般に一致するかどうかを調べよ。

**6.**　計算せよ。

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 3+\sqrt{3}\,i \\ 2-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 3-\sqrt{3}\,i \\ 2(1+\sqrt{3}\,i) \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & a \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

**7.**　任意の $d \times d$ 行列 $\mathsf{A}$ と任意の $d$ 次元ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle \tag{4}$$

が成り立つことを証明せよ。

次に、(4) の関係を用いて、任意の行列 $\mathsf{A}$ とベクトル $\boldsymbol{u}$ について、

$$\left\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u} \right\rangle \geq 0 \tag{5}$$

であることを証明せよ。