試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2016 年 7 月 22 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2017 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. m, ω, f_0 を実定数とする（ただし m と ω は正）。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\begin{cases} f_0\,\sin(\omega t) & 0\le t\le \pi/\omega \\ 0 & t\ge \pi/\omega \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0):=\dot{x}(0)$ を使え。

2. γ, α, β を実定数とする。$\beta+\gamma\neq 0$ とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t)=-\gamma\,x(t)+\alpha e^{\beta t} \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha=0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t)=Ae^{\beta t}$ と書けるものを求めよ（A は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α, β を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t)>0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\frac{\alpha\,t^2}{x(t)} \qquad \text{(b)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\alpha\,\sin(\beta\,t)\left(1+\{x(t)\}^2\right) \tag{2}$$

4. $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,\exp[\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t) - \gamma t] \tag{3}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(3) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

5. x, y 軸の回りの θ の回転はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ という行列で表わされる。「x 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと y 軸回りに $\pi/2$ の回転」および「y 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと x 軸回りに $\pi/2$ の回転」を表わす行列を求めよ。また、点 $(a, 0, 0)$ がそれぞれの回転でどの位置に移されるかを求めよ。

6. 計算せよ。

(a) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 2-\sqrt{3}\,i \\ 1+\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 2+\sqrt{3}\,i \\ 2-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 20 & -5 & 3 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$

7. 任意の $d \times d$ 行列 A と任意の d 次元ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{4}$$

が成り立つことを証明せよ。

次に、(4) の関係を用いて、任意の行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ について、

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u} \rangle \geq 0 \tag{5}$$

であることを証明せよ。