試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2017 年 7 月 21 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2017 年 10 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. m,ω,f_0 を実定数とする（ただし m と ω は正）。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\begin{cases} f_0\,\cos(\omega t) & 0\le t\le \pi/(2\omega) \\ 0 & t\ge \pi/(2\omega)\end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0):=\dot{x}(0)$ を使え。

2. γ,α,ω を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t)=-\gamma\,x(t)+\alpha\,\sin(\omega t) \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha=0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t)=A\,\sin(\omega t)+B\,\cos(\omega t)$ と書けるものを求めよ（A,B は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α,β を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t)>0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\frac{e^{\alpha t}}{x(t)}\qquad \text{(b)}\quad \frac{dx(t)}{dt}=\alpha\,t^2\left(1+\{x(t)\}^2\right) \tag{2}$$

4. $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,t\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t) - \gamma\,t^2] \tag{3}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(3) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

5. x, y 軸の回りの θ の回転はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ という行列で表わされる。(a) x 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと y 軸回りに $\pi/2$ の回転、および、(b) x 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと y 軸回りに $\pi/2$ の回転しさらに x 軸回りに $-\pi/2$ 回転を表わす行列を求めよ。また、回転 (b) で点 $(a, 0, 0)$ と点 $(0, 0, a)$ がそれぞれどの位置に移されるかを求めよ。

6. 計算せよ。

(a) $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3}\,i \\ 1-\sqrt{5}\,i \\ 3+\sqrt{5}\,i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3}\,i \\ 2+\sqrt{5}\,i \\ -\sqrt{5}\,i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$

7. A, B を任意の（複素数を成分にもつ）$d \times d$ 行列とするとき、

$$(\mathsf{AB})^{\dagger} = \mathsf{B}^{\dagger}\mathsf{A}^{\dagger} \tag{4}$$

が成り立つ。両辺の成分表示を一般的に書き下すことで、これを証明せよ。