試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2018 年 7 月 27 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2018 年 10 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. $m > 0,\ t_0 > 0,\ f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\,(t_0 - t), & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t \ge t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. $\gamma,\ \alpha,\ \beta$ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha + \beta\,t \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0,\ \beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A + B\,t$ と書けるものを求めよ（$A,\ B$ は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. $\alpha,\ \beta$ を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t) > 0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha\,\cos(\beta\,t)}{x(t)} \qquad \text{(b)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = (\alpha + \beta\,t)\bigl(1 + \{x(t)\}^2\bigr) \tag{2}$$

4. α, β を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t^2\, x(t) + \beta\, \exp\left[\frac{\alpha}{3}\, t^3\right] \tag{3}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\, \exp\left[\frac{\alpha}{3}\, t^3\right]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(3) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

5. x, z 軸の回りの θ の回転はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ という行列で表わされる。(a) x 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと z 軸回りに $\pi/2$ の回転、および、(b) z 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと x 軸回りに $\pi/2$ の回転を表わす行列を求めよ。それぞれの回転で点 (a, b, c) がどの点に移されるかを求めよ。

6. 計算せよ。

(a) $\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2}\, i \\ \sqrt{2} - i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2}\, i \\ \sqrt{2} + 2\, i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 \end{pmatrix}$

7. A, B を任意の（複素数を成分にもつ）$d \times d$ 行列とするとき、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{AB}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{BA}] \tag{4}$$

が成り立つことを証明せよ。