**「数学 2」試験について**　田崎晴明

- 問題は 3 ページから始まる。**試験開始までは問題を読まないこと。**（2 ページ目までには事前に目を通しておくこと。）
- まず、試験の準備をする。
  - 試験問題を参照できるようにする（印刷してもいいし、PC やタブレットなどで見られるようにしてもいい）。まだ見てはいけない。
  - 解答用紙を用意する。普通のレポート用紙でよい。問題は全部で 7 問なので、それぞれの問題の解答用紙の一枚目に問題番号、学籍番号、氏名をあらかじめ記入しておく。
  - 計算用紙を用意する。分量は自由。
  - 筆記用具も用意する。
- 自分で都合のよい時間をとり、正確に 90 分間の時間を測って受験する。「持ち込み不可」の試験と同じように問題文以外は何も参照してはいけない。もちろん、直接、間接に他人と相談してはいけない。試験中の質問は受け付けない（すみません）。
- 試験中に飲み食いしたりトイレに行ったりするのは自由（暑い時期だし水分はこまめに補給しましょう）。ただし、そのための時間延長はしないこと。
- 試験時間が終わったら答案を修正してはいけない。指示に従って答案をいつものアドレス `hal.tasaki.h@gmail.com` に送付する。もちろん答案の送付に使う時間は試験時間に含めないが、締め切りは 8 月 15 日の正午なので余裕を持って受験すること。
- 遅れて提出する人がいるかもしれないので、8 月 21 日までは試験の内容について LINE や SNS などで他人に見える形に書いてはいけない。
- 以上の注意に反した場合には不正行為とみなされて処分の対象となることがある。

以下は問題ページ冒頭の注意だが、事前に読んでおくこと。

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純計算は除く）。
- 問題は全部で 7 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールでいつもの専用アドレス `hal.tasaki.h@gmail.com` に送ること。メールの件名は、問題番号を入れてそれぞれ `m2:ex1`, `m2:ex2`, `m2:ex3` などとする。また、メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を明記すること。
- 締め切りは 8 月 15 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡

することと。

- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

**数学 2 試験問題**　2020 年 8 月 14 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純計算は除く）。
- 問題は全部で 7 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールでいつもの専用アドレス `hal.tasaki.h@gmail.com` に送ること。メールの件名は、問題番号を入れてそれぞれ `m2:ex1`, `m2:ex2`, `m2:ex3` などとする。また、メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を明記すること。
- 締め切りは 8 月 15 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

**1.**　$m > 0$, $t_0 > 0$, $f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\,(t_0 - t), & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t \ge t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

**2.**　$\gamma$, $\alpha$, $\omega$ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha\,\cos(\omega t) \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)$ と書けるものを求めよ ($A$, $B$ は求めるべき定数)。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

**3.**　$\alpha$, $\beta$ を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t) > 0$ とする)。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha\,e^{\beta\,t)}}{x(t)} \qquad \text{(b)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = (\alpha + \beta\,t^2)\bigl(1 + \{x(t)\}^2\bigr) \tag{2}$$

**4.** $\alpha, \beta, \omega$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,t^2\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

**5.** x, y 軸の回りの $\theta$ の回転はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ という行列で表わされる。

(a) 点 $(a, b, c)^{\mathrm{t}}$ を x 軸回りに $\pi/4$ 回転した点を求めよ。

(b) (a) で求めた点をさらに y 軸回りに $\pi/4$ 回転した点を求めよ。

**6.** 計算せよ。

(a) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 2-\sqrt{3}\,i \\ 1+\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}\,i \\ 2+\sqrt{3}\,i \\ 2-\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$

**7.** $d \times d$ 行列 $\mathsf{A}$ が任意の $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\mathsf{A})_{i,j} = (\mathsf{A})_{j,i} \in \mathbb{R}$ という性質を満たすとする（このような行列を実対称行列という）。このとき

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^2] \geq 0 \tag{3}$$

が成り立つことを証明せよ。

一方、$d \times d$ 行列 $\mathsf{A}$ が任意の $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\mathsf{A})_{i,j} \in \mathbb{R}$ という性質だけを満たすときには (3) は必ずしも成り立たない。簡単な反例を挙げることでこの事実を示せ。