数学 2 試験問題　2021 年 7 月 23 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 6 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3`, `ex4`, `e5`, `ex6` とする（数字はもちろん問題番号）。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を必ず書くこと。いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること（白紙の問題が複数ある場合はそれぞれの問題についてメールを送るように）。
- 締め切りは 7 月 25 日の正午とする。なんらかの事故があったらすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

---

1. $m > 0$, $t_0 > 0$, α を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} \alpha\,t, & 0 \le t \le t_0 \\ 0, & t \ge t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ（$x(t)$ を答えればよい）。任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。なお、$t = t_0$ では $x(t)$ の二階微分は不連続だが、$\dot{x}(t)$ と $x(t)$ は連続とする。

2. γ, α, β を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha + \beta\,t \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0$, $\beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A + B\,t$ と書けるものを求めよ（A, B は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α, β を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(a) では $x(t) > 0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(a)} \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha + \beta\, t}{x(t)} \qquad \text{(b)} \quad \frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t\, e^{\beta\, t^2} \left(1 + \{x(t)\}^2\right)$$

4. $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, \cos(\omega t)\, x(t) + \beta\, \exp[\,\gamma\, t + \frac{\alpha}{\omega}\, \sin(\omega t)]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\, \exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\, \sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

5. 計算せよ（この問題については答だけを書いてください）。

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2}\,i \\ 1-\sqrt{3}\,i \\ 1+\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2}\,i \\ 2+\sqrt{3}\,i \\ 1-2\sqrt{3}\,i \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(e)} \quad \det \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(f)} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

6. $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)^{\mathrm{t}}$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)^{\mathrm{t}}$ を任意の d 次元列ベクトルとする。成分 a_i, b_i $(i = 1, \ldots, d)$ は複素数である。

(a) $\boldsymbol{b}^{\dagger}\boldsymbol{a}$ を成分 a_i, b_i $(i = 1, \ldots, d)$ で表わせ。(b) $\mathsf{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\dagger}$ は $d \times d$ 行列である。その成分 $(\mathsf{A})_{i,j}$ は何か？　(c) $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}]$ を成分 a_i, $b_i (i = 1, \ldots, d)$ で表わせ。(d) $\boldsymbol{b}^{\dagger}\boldsymbol{a} = 0$ となるとき、行列 A^2 を求めよ。