

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書くこと（ここで、 $n = 1, 2, 3, 4$ ）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。2 学期になったら答案を受け取りに来ること（また連絡します）。2022 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

1. $m > 0, t_0 > 0, f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ f_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ ($x(t)$ を答えればよい)。任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。なお、 $t = t_0$ では $x(t)$ の二階微分は不連続だが、 $\dot{x}(t)$ と $x(t)$ は連続とする。

2. α, ω を正の定数、 β を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = \alpha x(t) + \beta \sin(\omega t) \quad (1)$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

- (a) $\beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。
- (b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\text{ps}}(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ と書けるものを求めよ (A, B は求めるべき定数)。
- (c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α, β, ω を正の定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \cos(\omega t) x(t) + \beta t \exp\left[\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)\right]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t) \exp\left[\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t)\right]$ という形に書き、 $C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

α, β を正の定数とする。 $t \geq 0$ について以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(c) では $x(t) > 0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$(c) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{t}}{x(t)} \quad (d) \frac{dx(t)}{dt} = \alpha e^{\beta t} (1 + \{x(t)\}^2) \quad (2)$$

4. $d \times d$ 行列 A, B をそれぞれ $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}, (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ と成分表示する。

(a) $(AB)_{i,j}$ を A, B の成分を使って表せ。

(b) $(B^\dagger A^\dagger)_{i,j}$ を A, B の成分を使って表せ。

(c) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ であることを示せ。

以下の計算をせよ（答えは結果だけでよい）。

$$(d) \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{7}i \\ \sqrt{7} - i \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{7}i \\ \sqrt{7} + 2i \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} (a \quad b \quad c)$$

$$(h) \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad (i) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$