試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	物理数学 2	2005 年 1 月 28 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。2005 年 7 月を過ぎたら、答案は予告なく処分する。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。解は任意定数を含むが、初期値 $x_0 = x(0)$ をそのまま任意定数にするか、あるいは、解にあらわれた任意定数を x_0 で表しておくこと。以下で a, b は正の定数。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} a\,t, & 0 \le t \le b \text{ のとき} \\ a\,b, & t \ge b \text{ のとき} \end{cases}$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\,x(t) + b$$

(c)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,t^2\{1 + b\,\{x(t)\}^2\}$$

2. $f(y)$ を任意の与えられた関数とする。常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

は、簡単な変換により変数分離形に帰着して一般的に解ける。そのことを示し、一般解を求めよ。

3. a を定数とし、

$$\varphi(x, y, z) = a\ \log(x^2 + y^2)$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x, y, z)$ のグラディエントを計算せよ（$x = y = 0$ となるところは除く）。

(b) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ（$x = y = 0$ となるところは除く）。

a を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = (a\,x^2\,y\,z, a\,x\,y^2\,z, a\,x\,y\,z^2)$$

というベクトル場を考える。

(c) $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(d) $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ のローテーションを計算せよ。

4. a を正の定数、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とし、ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = a\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

を考える。

(a) これは、どういうベクトル場か？　大きさと方向について答えよ。

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を成分表示せよ。結果は、$\boldsymbol{r}$ は用いず、x, y, z を使って表すこと。

(c) b, c $(0 < b < c)$ を定数とする。$(b, 2b, 0)$ から $(c, 2c, 0)$ へ向かうまっすぐな道 p に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分を計算せよ。

(d) $b > 0$ を定数とする。$z = b$ で指定される（xy 面と平行な）無限に広い平面を S と呼ぶ。z 軸の正の方向から見える側を表とする。S 上の $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分を計算せよ。