試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	物理数学 2	2006 年 1 月 27 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 行列 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルと求めよ。

2. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ。解は、初期値 $x_0 = x(0)$ を使って表すこと。以下で a, b は正の定数。ただし、(c) では $x(t) > 0$ とする。

(a)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) + b$$

(b)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,t\,\{1 + b\,\{x(t)\}^2\}$$

(c)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,\sqrt{x(t)}$$

3. α, β を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,t^2\,x(t) + \beta\,t\,\exp[\,\frac{\alpha}{3}t^3\,]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[(\alpha/3)\,t^3]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。

4. a を定数とし、

$$\varphi(x,y,z) = \exp[\frac{a}{2}\,(x^2+y^2+z^2)]$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x,y,z)$ のグラディエントを計算せよ。

(b) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ。

a を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (a\,\sin x\,\cos y\,\cos z, a\,\sin y\,\cos z\,\cos x, a\,\sin z\,\cos x\,\cos y)$$

というベクトル場を考える。

(c) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(d) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のローテーションを計算せよ。

5. a を正の定数、$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ とし、次のベクトル場を考える。

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = a\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

(a) これは、どういうベクトル場か？　大きさと方向について答えよ。

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を成分表示せよ。結果は、$\boldsymbol{r}$ は用いず、x,y,z を使って表すこと。

b を正の定数とする。z 軸からの距離が b の点からなる（無限に長い）円筒状の面を S とする。いつもどおり外側を表とする。S 上の点は $0 \le \theta < 2\pi$ と $z \in \mathbb{R}$ を使って、$(b\,\cos\theta, b\,\sin\theta, z)$ と表すことができる。さらに、z に Δz、θ に $\Delta\theta$ の幅を持たせてつくった微小面素の面素ベクトルは次のようになる。

$$\Delta\boldsymbol{a} = b\,\Delta\theta\,\Delta z\,(\cos\theta, \sin\theta, 0) \tag{1}$$

(c) 円筒面上での面積分 $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を計算せよ。答えだけでもほんの少しは点は出すけれど、問題の主眼はきちんと積分を行なうことだ。

b, c を正の定数とする。パラメター $0 \le \theta \le 2\pi$ で $(b\,\cos\theta, b\,\sin\theta, c\theta)$ と指定される道 p をとる。

(d) 線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよ。答えだけでも少しは点を出すけれど、やはり問題の主眼は積分。