試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 IV	2007 年 1 月 26 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。問題文中で (x, y, z) **はデカルト座標を表す。**

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ のディターミナントを求めよ。

2. 実対称行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルと求めよ。これを利用して、正の整数 n について A^n を求めよ。

3. 二つの（実の）未知関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ についての常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= 6\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= 2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) \end{aligned} \tag{1}$$

の一般解を、以下の手続きに従って求めよう。

(a) 列ベクトル $\boldsymbol{x}(t) := (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{t}}$ を使うと、(1) は $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathsf{A}\,\boldsymbol{x}(t)$ という簡単な形になる。行列 A を求めよ。

(b) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ（固有ベクトルを規格化する必要はない。きれいな形にしておく方が後で楽)。固有ベクトルを、$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ と書く。

(c) 新たな関数 $y_1(t)$, $y_2(t)$ を使って、解を $\boldsymbol{x}(t) = y_1(t)\,\boldsymbol{v}_1 + y_2(t)\,\boldsymbol{v}_2$ と書くとき、$y_1(t)$, $y_2(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(d) 上の $y_1(t)$, $y_2(t)$ についての微分方程式を解き、それを用いて、もとの微分方程式 (1) の解を求めよ。最終的な解の表式を、初期値 $x_1(0)$, $x_2(0)$ を使って表せ。

4.　a を定数とし、

$$\varphi(x,y,z)=a\,\log\Big[\,\frac{(x-y)^2}{2}+z^2\,\Big]$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x,y,z)$ のグラディエントを計算せよ。

(b) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ。

5.　a,b を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x,y,z)=(-a\,y+b\,x,a\,x+b\,y,0)$$

というベクトル場を考える。

(a) $a>0$ で $b=0$ のとき、$a=0$ で $b>0$ のとき、それぞれについて、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の xy 面内でのおおよその形を描け。

(b) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(c) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のローテーションを計算せよ。

6.　a を定数とし、ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z)=a\,(x,y,z)$$

を考える。

(a) 点 $(0,0,b)$ から $(c,0,b)$ に向かうまっすぐな道に沿った $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の線積分を求めよ。

b,c を正の定数とする。上面が $x^2+y^2\leq c^2$, $z=b$ と、底面が $x^2+y^2\leq c^2$, $z=-b$ と、側面が $x^2+y^2=c^2$, $-b\leq z\leq b$ と表される閉じた円柱状の面を S とする。S からの $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のわき出し $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めたい。

(b) ガウスの定理を用いて、面積分 $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ の値を求めよ。

(c) S の上面、底面、側面それぞれからのわき出しを別々に求めよ。それらを合計して、$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよ。