試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 IV	2008 年 2 月 1 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。問題文中で (x,y,z) はデカルト座標を表す。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のディターミナントを求めよ。

2. 実対称行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルと求めよ。これを利用して、正の整数 n について A^n を求めよ。

3. 二つの（実の）未知関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ についての常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= x_1(t) + 3\,x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -x_1(t) + 5\,x_2(t) \end{aligned} \tag{1}$$

の一般解を、以下の手続きに従って求めよう。

(a) 列ベクトル $\boldsymbol{x}(t) := (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{t}}$ を使うと、(1) は $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathsf{A}\,\boldsymbol{x}(t)$ という簡単な形になる。行列 A を求めよ。

(b) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ（固有ベクトルを規格化する必要はない。きれいな形にしておく方が後で楽)。固有ベクトルを、$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ と書く。

(c) 新たな関数 $y_1(t)$, $y_2(t)$ を使って、解を $\boldsymbol{x}(t) = y_1(t)\,\boldsymbol{v}_1 + y_2(t)\,\boldsymbol{v}_2$ と書くとき、$y_1(t)$, $y_2(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(d) 上の $y_1(t)$, $y_2(t)$ についての微分方程式を解き、それを用いて、もとの微分方程式 (1) の解を求めよ。最終的な解の表式を、初期値 $x_1(0)$, $x_2(0)$ を使って表せ。

4. a を定数とし、

$$\varphi(x,y,z) = \frac{a}{2}(x-y)^2$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x,y,z)$ のグラディエントを計算せよ。

(b) 上で求めたベクトル場は、どのような場か？　概略を説明し、特徴が分かるような図を描け。

(c) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ。

5. a を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (a\,x^2yz, a\,xy^2z, a\,xyz^2)$$

というベクトル場を考える。

(a) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(b) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のローテーションを計算せよ。

6. a,b,c を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (a\,y, b\,x, c\,z)$$

というベクトル場を考える。

(a) 点 $(0,0,0)$ から (a,b,c) に向かうまっすぐな道に沿った $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の線積分を求めよ。

(b) R を正の定数とする。xy 面内の原点を中心とした半径 R の円周状の道に沿った $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の線積分を求めよ。ただし、道の向きは、道に沿ってまわったとき右ネジが z 軸正方向に動くように取る。

(c) L を正の定数とする。$|x| \leq L$, $|y| \leq L$, $z = L$ で指定される面での $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の面積分を求めよ。ただし、z 軸の正の側を面の表とする。

(d) L を正の定数とする。$x = L$, $|y| \leq L$, $|z| \leq L$ で指定される面での $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の面積分を求めよ。ただし、x 軸の正の側を面の表とする。