試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 IV	2009 年 1 月 23 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。問題文中で (x,y,z) はデカルト座標を表す。

0. レポートの提出状況を書け（書いていなければ提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

2. 実対称行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルと求めよ。これを利用して、正の整数 n について A^n を求めよ。

3. a を定数とし、

$$\varphi(x,y,z) = a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x,y,z)$ のグラディエントを計算せよ。

(b) 上で求めたベクトル場は、どのような場か？　各点での大きさと方向を求め、特徴が分かるような図を描け。

(c) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ。

4. a, b を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (ax+bz, ay, az-bx)$$

というベクトル場を考える。

(a) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(b) $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ のローテーションを計算せよ。

5.　a, b を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = (ax - by, ay + bx, az)$$

というベクトル場を考える。以下、r を正の定数とする。

(a) 点 $(0,0,0)$ から (r,r,r) に向かうまっすぐな道に沿った $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の線積分を求めよ。

(b) xy 面内の原点を中心とした半径 r の円周状の道に沿った $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の線積分を求めよ。ただし、道の向きは、道に沿ってまわったとき右ネジが z 軸正方向に動くように取る。

(c) $x = r,\ 0 \leq y \leq r,\ 0 \leq z \leq r$ で指定される面上での $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の面積分を求めよ。ただし、x の大きいほうから見える側を面の表とする。

(d) L を正の定数とする。原点を中心にする半径 r の球面上での $\boldsymbol{V}(x,y,z)$ の面積分を求めよ。もちろん、外側を表にする。面素のとりかたなどもきちんと説明すること（もちろん、この問題は面倒)。

6.　A をエルミート行列とする。二つのゼロでないベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が

$$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$$

を満たし、かつ $\lambda \neq \mu$ である。このとき、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が直交することを示せ。

（ヒント：行列 B のエルミート共役を $\mathsf{B}^\dagger$ とすると、任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について $\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{B}\boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \mathsf{B}^\dagger\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle$ が成り立つ。）