試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 IV	2010 年 1 月 29 日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。答案は必ず受け取りに来ること。試験日から一年たったら答案を予告なく処分する。

問題文中で (x, y, z) **はデカルト座標を表す。**

0. レポートの提出状況を書け（書いていなければ提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のディターミナントを求めよ。

2. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

3. 実対称行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルと求めよ。これを利用して、正の整数 n について A^n を求めよ。

4. a を定数とし、

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

というスカラー場を考える。

(a) $\varphi(x, y, z)$ のグラディエントを計算せよ（微分できない点は除け）。

(b) 上で求めたベクトル場は、どのような場か？　各点での大きさと方向を求め、特徴が分かるような図を描け。

(c) 上で求めたベクトル場のダイバージェンスを計算せよ（微分できない点は除け）。

5. a, b, c を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = (a\,x\,y, b\,y\,z, c\,z\,x)$$

というベクトル場を考える。

(a) $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ のダイバージェンスを計算せよ。

(b) $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ のローテーションを計算せよ。

6. a, b, c を定数とし、

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = (a\,x, b\,y, c\,z)$$

というベクトル場を考える。

(a) 点 $(1, 0, 0)$ から $(0, 2, 0)$ に向かうまっすぐな道に沿った $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ の線積分を求めよ。

(b) $\boldsymbol{\ell}(\theta) = (\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$（ただし $0 \le \theta \le \pi/2$）とすれば、点 $(1, 0, 0)$ から $(0, 2, 0)$ に向かう楕円状の道が定まる。この道に沿った $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ の線積分を求めよ。

(c) r を正の定数とする。原点を中心にした半径 r の球面のうち第一象限（つまり $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$）に含まれる部分を S とする。原点とは反対側の面を表と定義する。面 S 上での $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ の面積分を求めよ。

必要なら以下の定積分を使ってよい。

$$\int d\theta\,(\sin\theta)^3 = -\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos(3\theta)$$
$$\int d\theta\,\sin\theta\,(\cos\theta)^2 = -\frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{12}\cos(3\theta)$$

7. A を任意の $d \times d$ 行列とし、$\mathsf{B} = \mathsf{A}^\dagger\,\mathsf{A}$ とする。任意のゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}$ について

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{B}\,\boldsymbol{v} \rangle \ge 0$$

であることを証明せよ。余裕があれば、上の事実を用いて、B の固有値は全てゼロ以上であることを証明せよ。なお B はエルミート行列であることを（示してから）利用するとよい。