試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2011年1月31日	月	1	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2011年9月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。** レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L を正の定数とする。一辺が L の正方形状の領域にある質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L$, $0\le y\le L$ であり、境界条件は任意の x,y について $\varphi(x,0)=\varphi(x,L)=\varphi(0,y)=\varphi(L,y)=0$ とする（要するに、正方形の辺で状態関数はゼロ）。

(a) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ のように書けるとしたら、$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件はどうなるか？

上で求めた境界条件を満たす $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ

$$f''(x)=-a\,f(x),\quad g''(y)=-b\,g(y) \tag{2}$$

を満たすとする（a,b は解に応じて定まる実定数）。

(b) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ が (1) を満たすことを示せ。このときの E を a,b で表わせ。

(c) (2) を満たす $f(x)$, $g(y)$, a, b を全て求めよ。それを用いて、シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

2. 1次元の $x\ge 0$ の領域でのポテンシャル $V(x)$ 中の質量 m の粒子の定常状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)+V(x)\,\varphi(x)=E\,\varphi(x) \tag{3}$$

を考える。境界条件は $\varphi(0)=0$ および $x\to\infty$ で $\varphi(x)\to 0$ とする。ポテンシャルは

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le a\text{ のとき}\\ V_0 & x>a\text{ のとき}\end{cases} \tag{4}$$

である（$V_0>0$ と $a>0$ は定数）。

この系のエネルギー固有値 E を決める方程式を求めよう。E（あるいは E から導かれる量）を用いて以下に答よ。なお E は $0<E<V_0$ の範囲にある定数としてよい。状態関数の規格化は考えなくてよい。

(a) $0\le x\le a$ での $\varphi(x)$ はどのような形になるか。

(b) $x\ge a$ での $\varphi(x)$ はどのような形になるか。

(c) $x=a$ で状態関数をつなぐ条件を求めよ。

3. 1次元の1粒子の量子力学系を考え、$\hat{x},\hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a}:=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}+i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \tag{5}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

と書ける（$m>0$ は粒子の質量、$\omega>0$ は振動子の角振動数）。

(a) 交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ を示せ。

$\boldsymbol{\varphi}_0$ を、$\hat{a}\,\boldsymbol{\varphi}_0=0$ と $\langle\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_0\rangle=1$ を満たす状態とし、

$$\boldsymbol{\varphi}_1:=\hat{a}^\dagger\,\boldsymbol{\varphi}_0,\quad \boldsymbol{\varphi}_2:=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2\,\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{7}$$

という二つの状態を定義する。

(b) $\langle\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_1\rangle,\langle\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_2\rangle$ を求めよ。

(c) $\boldsymbol{\varphi}_0,\ \boldsymbol{\varphi}_1,\ \boldsymbol{\varphi}_2$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。