試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2012 年 1 月 27 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2012 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L を正の定数とする。一辺が L の正方形状の領域にある質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L$, $0\le y\le L$ であり、x 方向には周期境界条件、y 方向には壁がある境界条件をとる。つまり、任意の y について $\varphi(0,y)=\varphi(L,y)$ かつ $\partial\varphi(0,y)/\partial x=\partial\varphi(L,y)/\partial x$ であり、任意の x について $\varphi(x,0)=\varphi(x,L)=0$ である。

(a) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ と書けるとしたら、$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件はどうなるか？

上で求めた境界条件を満たす $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ

$$f''(x)=-a\,f(x),\quad g''(y)=-b\,g(y) \tag{2}$$

を満たすとする（a, b は解に応じて定まる実定数）。

(b) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ が (1) を満たすことを示せ。このときの E を a, b で表わせ。

(c) (2) を満たす $f(x)$, $g(y)$, a, b を全て求めよ。それを用いて、シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

2. 無限に大きい1次元空間において、ポテンシャル $V(x)$ 中の質量 m の粒子の定常状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{3}$$

を考える。境界条件は $x \to \pm\infty$ で $\varphi(x) \to 0$ とする。ポテンシャルは

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a \leq x \leq a \text{ のとき} \\ V_0 & x > a \text{ または } x < -a \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

である（$V_0 > 0$ と $a > 0$ は定数）。

この系のエネルギー固有値 E を決める方程式を求めよう。とくにエネルギー固有状態が x の反転について対称なもの（つまり、$\varphi(x) = \varphi(-x)$）だけに注目する。E（あるいは E から導かれる量）を用いて以下に答よ。なお E は $0 < E < V_0$ の範囲にある定数としてよい。波動関数の規格化は考えなくてよい。

(a) $-a \leq x \leq a$ での $\varphi(x)$ はどのような形になるか。

(b) $x > a$ での $\varphi(x)$ はどのような形になるか。

(c) $x = a$ で状態関数をつなぐ条件を求めよ。

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2012 年 1 月 27 日	金	2	田崎

3.　1 次元の 1 粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \tag{5}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数)。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。

(b) $\hat{x}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を使って表わせ。

$\boldsymbol{\varphi}_0$ を、$\hat{a}\,\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ と $\langle\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、$\boldsymbol{\varphi}_1 := \hat{a}^\dagger\,\boldsymbol{\varphi}_0$ とする。

(c) $\langle\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1\rangle$, $\langle\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_0\rangle$ を求めよ。

(d) ふたつの状態での位置の期待値 $\langle\boldsymbol{\varphi}_0, \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}_0\rangle$, $\langle\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}_1\rangle$ を求めよ。

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\{\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_1\} \tag{7}$$

という状態を定義する。

(e) $\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\rangle$ および $\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{x}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\rangle$ を求めよ。

(f) 初期条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ を満たす時間発展のシュレディンガーの解を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ とする。$\langle\boldsymbol{\varphi}(t), \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle$ を求めよ（試験後に付記：この小問は問題文が間違っていたので直したものを掲載しておきます)。