試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2013 年 1 月 18 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2013 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0.　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1.　L_1, L_2 を正の定数とする。辺の長さが L_1, L_2 の長方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L_1$, $0\le y\le L_2$ であり、境界条件は任意の x,y について $\varphi(x,0)=\varphi(x,L_2)=\varphi(0,y)=\varphi(L_1,y)=0$ とする（要するに、長方形の辺で波動関数はゼロ）。

(a) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ のように書けるとしたら、$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件はどうなるか？

上で求めた境界条件を満たす $f(x)$, $g(y)$ がそれぞれ

$$f''(x)=-a\,f(x),\quad g''(y)=-b\,g(y) \tag{2}$$

を満たすとする（a, b は解に応じて定まる実定数）。

(b) $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ が (1) を満たすことを示せ。このときの E を a, b で表わせ。

(c) (2) を満たす $f(x)$, $g(y)$, a, b を全て求めよ。それを用いて、シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

2.　1次元の区間におけるデルタ関数型のポテンシャル中の質量 m の粒子の定常状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + v_0\,\delta(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{3}$$

を考える。ここで、x は $-L \leq x \leq L$ の範囲を動く。

境界条件は $\varphi(-L) = \varphi(L) = 0$ とする。講義で示したように、(3) の解は原点で接続条件 $\varphi'(+0) = \varphi'(-0) + (2mv_0/\hbar^2)\varphi(0)$ を満たす。

まず、手始めに $v_0 = 0$ のときを見ておく（これは易しい！）。

(a) $v_0 = 0$ ときの基底状態のエネルギー $E_1^{(0)}$ と第一励起状態のエネルギー $E_2^{(0)}$ を求めよ。

以下では $v_0 \geq 0$ とする。

(b) 座標の反転（つまり、x を $-x$ に変えること）について対称な波動関数に対応するエネルギー固有値を得るための関係を求めよ。

(c) 座標の反転について反対称な波動関数に対応するエネルギー固有値を求めよ。これらの中でもっとも低いエネルギーと上の $E_2^{(0)}$ を比較せよ。

(d) 問い (b) で求めたなかで最も低いエネルギーに注目する。v_0 が $v_0 \geq 0$ の範囲を動くとき、このエネルギーはどういう範囲を動くか？　特に、$E_1^{(0)}$, $E_2^{(0)}$ との関係に注目せよ。

3.　1次元の1粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\;\hat{p} \tag{4}$$

と定義する。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$\boldsymbol{\varphi}_0$ を、$\hat{a}\,\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ と $\langle \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle = 1$ を満たす状態とし、$\boldsymbol{\varphi}_1 := \hat{a}^\dagger\,\boldsymbol{\varphi}_0$ とする。

(b) $\langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle$ を求めよ。

(c) 期待値 $\langle \boldsymbol{\varphi}_1, \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{\varphi}_1, (\hat{x})^2\,\boldsymbol{\varphi}_1 \rangle$ を求めよ。