試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2015 年 1 月 30 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2015 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L_1, L_2 を正の定数とする。辺の長さが L_1, L_2 の長方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L_1,\ 0\le y\le L_2$ である。境界条件は任意の x, y について

$$\varphi(0,y)=\varphi(L_1,y)=\varphi(x,0)=\varphi(x,L_2)=0 \tag{2}$$

とする（つまり長方形の境界では波動関数がゼロ)。

(a) (1) の解は $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ のように書ける。$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件と微分方程式はどうなるか？

(b) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

(c) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。また、基底状態と第一励起状態はそれぞれ何重に縮退しているか？ $L_1=L_2$ の場合と $L_1<L_2$ の場合に分けて解答せよ。

2. 1次元の区間におけるデルタ関数型のポテンシャル中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)-v_0\,\delta(x)\,\varphi(x)=E\,\varphi(x) \tag{3}$$

を考える。$v_0\ge 0$ は定数である。x は $-L\le x\le L$ の範囲を動く。

境界条件は $\varphi(-L)=\varphi(L)=0$ とする。講義で示したように、(3) の解は原点で接続条件 $\varphi'(+0)-\varphi'(-0)=-(2mv_0/\hbar^2)\varphi(0)$ を満たす。

(a) $v_0 = 0$ とした場合のエネルギー固有状態（規格化しなくてもよい）と対応するエネルギー固有値を求めよ。

(b) $v_0 = 0$ のときの基底状態の波動関数の概略をグラフに描け。v_0 が正だが十分に小さいときの基底状態の波動関数は $v_0 = 0$ のときの波動関数を少し変形した関数になる。この波動関数の概略をグラフに描け（$v_0 = 0$ との違いが明瞭になるように工夫せよ)。この問題は計算せずに解答すること。

以下では v_0 は正とする。

(c) 反対称な波動関数に対応するエネルギー固有状態の波数 k を求めよ。

(d) 対称な波動関数に対応するエネルギー固有状態の波数 k を決める条件を求めよ。

(e) この問題では、v_0 を大きくしていくと途中で基底状態の性質が大きく変化する。境目になる v_0 の値を求め、これがどのような変化かを述べよ。

3. 　1 次元の 1 粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \tag{4}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数)。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$\boldsymbol{\varphi}_0$ を、$\hat{a}\,\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ と $\langle\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、

$$\boldsymbol{\varphi}_1 := \hat{a}^\dagger\,\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{6}$$

と定義する。

(b) $\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$\boldsymbol{\varphi}_1$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}_1\rangle, \langle\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{x}^2\,\boldsymbol{\varphi}_1\rangle, \langle\boldsymbol{\varphi}_1, \hat{x}\,\boldsymbol{\varphi}_0\rangle$ を計算せよ。