試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2016 年 1 月 29 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2016 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。** レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L_1, L_2 を正の定数とする。辺の長さが L_1, L_2 の長方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L_1$, $0\le y\le L_2$ である。境界条件は任意の x,y について

$$\varphi(0,y)=\varphi(L_1,y)=0,\quad \varphi(x,0)=\varphi(x,L_2),\quad \left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L_2} \tag{2}$$

とする（x 方向は両端で波動関数がゼロ、y 方向は周期境界）。

(a) (1) の解は $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ のように書ける。$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件と微分方程式はどうなるか？

(b) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

(c) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。

2. 1次元の区間におけるデルタ関数型のポテンシャル中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)-v_0\,\delta(x)\,\varphi(x)=E\,\varphi(x) \tag{3}$$

を考える。$v_0\ge 0$ は定数である。x は $-L\le x\le L$ の範囲を動く。境界条件は $\varphi(-L)=\varphi(L)=0$ とする。講義で示したように、(3) の解は原点で接続条件 $\varphi'(+0)-\varphi'(-0)=-(2mv_0/\hbar^2)\varphi(0)$ を満たす。

(a) $v_0 = 0$ としたとき、エネルギー固有状態（規格化しなくてもよい）と対応するエネルギー固有値を求めよ。

(b) $v_0 = 0$ のときの基底状態と第一励起状態の波動関数の概略をグラフに描け。v_0 が正だが十分に小さいときの基底状態と第一励起状態の波動関数は $v_0 = 0$ のときの波動関数を少し変形した関数になるだろう。波動関数の概略を描け。

以下では v_0 は正とする。

(c) 反対称な波動関数に対応するエネルギー固有状態の波数 k を求めよ。

(d) 対称な波動関数に対応するエネルギー固有状態の波数 k を決める条件を求めよ。

(e) この問題では、v_0 を大きくしていくと途中で基底状態の性質が大きく変化する。境目になる v_0 の値を求め、これがどのような変化かを述べよ。

3. 1 次元の 1 粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \tag{4}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数）。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$|\varphi_0\rangle$ を、$\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$ と $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、

$$|\varphi_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2|\varphi_0\rangle \tag{6}$$

という状態を定義する。

(b) $|\varphi_0\rangle, |\varphi_2\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$|\varphi_2\rangle$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_0\rangle$ および $\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_2\rangle$ を計算せよ。