試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2018 年 1 月 26 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2018 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L_1, L_2 を正の定数とする。辺の長さが L_1, L_2 の長方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L_1$, $0\le y\le L_2$ であり、境界条件は任意の x,y について

$$\begin{aligned}\varphi(0,y)&=\varphi(L_1,y), &\quad \left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}&=\left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right|_{x=L_1}\\ \varphi(x,0)&=\varphi(x,L_2), &\quad \left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}&=\left.\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right|_{y=L_2}\end{aligned} \tag{2}$$

とする（x 方向も y 方向は周期境界）。

(a) (1) の解は $\varphi(x,y)=f(x)\,g(y)$ のように書ける。$f(x)$, $g(y)$ の満たすべき境界条件と微分方程式はどうなるか？

(b) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

(c) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求め、それぞれの縮退度を求めよ。$L_1<L_2$ の場合と $L_1=L_2$ の場合を別個に考察せよ。

2.　a, b を $a > b$ を満たす正の定数、V_0 を正の定数とする。区間 $-a \le x \le a$ におけるポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a \le x < -b \text{ または } b < x \le a \text{ のとき} \\ V_0 & -b \le x \le b \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

の中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{4}$$

を考える。境界条件は $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ とする。

座標の反転について対称なエネルギー固有状態の波動関数は

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\,\sin(k(x+a)) & -a \le x \le -b \\ B\,\cosh(\kappa x) & -b \le x \le b \\ A\,\sin(k(-x+a)) & b \le x \le a \end{cases} \tag{5}$$

と書ける。ただし A, B, k, κ は（これから決める）定数である。

(a) エネルギー固有値 E を k を用いて表わせ。

(b) エネルギー固有値 E を κ を用いて表わせ。

(c) 波動関数の連続性の条件に注意して、k を決めるための条件を求めよ（この条件の中に κ を含めないこと）。

座標の反転について反対称なエネルギー固有状態についても同様の考察をしよう。

(d) 上の (5) のように波動関数の一般的な形を書け。

(e) 波数 k を決めるための条件を求めよ。

3.　1次元の1粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\ \hat{p} \tag{6}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数）。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$|\varphi_0\rangle$ を、$\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$ と $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、

$$|\varphi_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2|\varphi_0\rangle \tag{8}$$

という状態を定義する。

(b) $|\varphi_0\rangle, |\varphi_2\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$|\varphi_2\rangle$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\varphi_0|\hat{x}|\varphi_0\rangle$ および $\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_2\rangle$ を計算せよ。