量子力学 I

2020 年 1 月 24 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n=1,2,3,4$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。試験後、答案を受け取りにくること。2020 年 9 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

0.　これは 1 枚目の冒頭に書くこと。レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければレポートは提出していないとみなす）。レポートは返却済みのものも新規のものも今日の答案にはさんで提出すること。

1.　L を正の定数とする。辺の長さが L の正方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L,\ 0\le y\le L$ であり、x 方向、y 方向ともに周期的境界条件を取る。

(a) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

(b) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求め、それぞれの縮退度を求めよ。

2.　一次元のシュレディンガー方程式でポテンシャルが座標の反転について対称（つまり偶関数）ならばエネルギー固有状態の波動関数は対称（偶関数）か反対称（奇関数）のいずれかに取れるという定理を講義で示した。しかし、$a>0$ を定数とし、$-a\le x\le a$ の範囲での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)=E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を周期的境界条件（$\varphi(a)=\varphi(-a),\ \varphi'(a)=\varphi'(-a)$）のもとで考えると、エネルギー固有状態は

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{ikx} \tag{3}$$

と書ける。ここで、$k\ne0$ なら $\varphi(x)$ は対称でも反対称でもない。これが最初に述べた定理と矛盾しないことを説明せよ。

3. a と V_0 を正の定数とし、$x \geq 0$ におけるポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \text{ のとき} \\ V_0 & x > a \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

の中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{5}$$

を考える。$x \geq 0$ であり、境界条件は $\varphi(0) = 0$ および $x \to \infty$ で $\varphi(x) \to 0$ とする。

ここでは、$0 < E < V_0$ を満たすエネルギー固有値と対応するエネルギー固有状態に注目する。

(a) エネルギー固有状態の波動関数の $0 \leq x \leq a$ での関数形を $\sin kx$, $\cos kx$ を使って表わせ（k は正の定数)。エネルギー固有値 E を k で表わせ。

(b) エネルギー固有状態の波動関数の $x > a$ での関数形を $e^{\theta x}$, $e^{-\theta x}$ を使って表わせ (θ は正の定数)。エネルギー固有値 E を θ で表わせ。

(c) 波動関数の連続性の条件に注意して、k を決めるための条件を求めよ（条件に k 以外の未知の量をを含めないこと)。

(d) $0 < E < V_0$ を満たすエネルギー固有値が少なくとも一つ存在するための a と V_0 の条件を求めよ。

4. 1 次元の 1 粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}$, $\hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\;\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\;\hat{p} \tag{6}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数)。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$|\varphi_0\rangle$ を、$\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$ と $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、$|\varphi_1\rangle := \hat{a}^\dagger|\varphi_0\rangle$ という状態を定義する。

(b) $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$|\varphi_1\rangle$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\varphi_0|\hat{x}|\varphi_0\rangle$, $\langle\varphi_1|\hat{x}|\varphi_1\rangle$、$\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_0\rangle$, $\langle\varphi_1|\hat{x}^2|\varphi_1\rangle$, を求めよ。