量子力学 I 試験について　田崎晴明

- 問題は 3 ページから始まる。**試験開始までは問題を読まないこと。**（2 ページ目までには事前に目を通しておくこと。）
- まず、試験の準備をする。
  - 試験問題を参照できるようにする（印刷してもいいし、PC やタブレットなどで見られるようにしてもいい）。まだ見てはいけない。
  - 解答用紙を用意する。普通のレポート用紙でよい。問題は全部で 4 問なので、それぞれの問題の解答用紙の一枚目に問題番号、学籍番号、氏名をあらかじめ記入しておく。
  - 計算用紙を用意する。分量は自由。
  - 筆記用具も用意する。
- 自分で都合のよい時間をとり、正確に 90 分間の時間を測って受験する。「持ち込み不可」の試験と同じように問題文以外は何も参照してはいけない。もちろん、直接、間接に他人と相談してはいけない。試験中の質問は受け付けない（すみません)。
- 試験中に飲み食いしたりトイレに行ったりするのは自由。ただし、そのための時間延長はしないこと。
- 試験時間が終わったら答案を修正してはいけない。指示に従って答案を専用アドレスに送付する。もちろん答案の送付に使う時間は試験時間に含めないが、締め切りは 1 月 30 日の正午なので余裕を持って受験すること。
- 解答用紙の枚数は自由だが、なるべくまとめて丁寧に書くのが望ましい。
- 病気などの事情で遅れて提出する人がいるかもしれないので、私から G-Port 経由で連絡するまでは試験の内容について LINE や SNS などで他人に見える形に書いてはいけない。
- 以上の注意に反した場合には不正行為とみなされて処分の対象となることがある。

以下は問題ページ冒頭の注意だが、事前に読んでおくこと。

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 4 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3`, `ex4` とする（数字はもちろん問題番号)。なお、いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること。メールの本文と解答用紙の**両方に**

学籍番号と氏名を必ず書くこと。

- 締め切りは 1 月 30 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

量子力学 I 試験問題　2021 年 1 月 29 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 4 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3`, `ex4` とする（数字はもちろん問題番号)。なお、いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を必ず書くこと。
- 締め切りは 1 月 30 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

---

1. L を正の定数とする。辺の長さが L の正方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L,\ 0\le y\le L$ であり、x 方向、y 方向ともに「境界で波動関数はゼロ」という境界条件をとる。

(a) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。
(b) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求め、それぞれの縮退度を求めよ。

2. 一次元のシュレディンガー方程式でポテンシャルが座標の反転について対称（つまり偶関数）ならばエネルギー固有状態の波動関数は対称（偶関数）か反対称（奇関数）のいずれかに取れるという定理を講義で示した。しかし、$a>0$ を定数とし、$-a\le x\le a$ の範囲での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)=E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を周期的境界条件（$\varphi(a)=\varphi(-a),\ \varphi'(a)=\varphi'(-a)$）のもとで考えると、エネルギー固有状態は

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{ikx} \tag{3}$$

と書ける。ここで、$k\neq 0$ なら $\varphi(x)$ は対称でも反対称でもない。これが最初に述べた定理と矛盾しないことを説明せよ。

3. a, b を $a > b$ を満たす正の定数、V_0 を正の定数とする。区間 $-a \le x \le a$ における
ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a \le x < -b \text{ または } b < x \le a \text{ のとき} \\ V_0 & -b \le x \le b \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

の中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{5}$$

を考える。境界条件は $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ とする。

ここでは、$E > V_0$ を満たすエネルギー固有値と対応するエネルギー固有状態に注目する。必要なら $v_0 = 2mV_0/\hbar^2$ という定数を用いること。

座標の反転について対称なエネルギー固有状態の波動関数は

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(k(x+a)) & -a \le x \le -b \\ C\,\cos(qx) & -b \le x \le b \\ \sin(k(-x+a)) & b \le x \le a \end{cases} \tag{6}$$

と書ける。ただし C, k, q は（これから決める）定数である。

(a) エネルギー固有値 E を k, q それぞれを用いて表わせ。その結果を用いて k と q を結ぶ（E を含まない）関係を書け。

(b) 波動関数の連続性の条件に注意して、k を決めるための条件を求めよ（条件に k 以外の未知の量をを含めないこと）。

座標の反転について反対称なエネルギー固有状態についても同様の考察をしよう。

(c) 上の (6) のように波動関数の一般的な形を書け。

(d) 波数 k を決めるための条件を求めよ（k 以外の未知の量をを含めないこと）。

4. 1 次元の 1 粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}$, $\hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\,\hat{p} \tag{7}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数)。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$|\varphi_0\rangle$ を、$\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$ と $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、$|\varphi_1\rangle := \hat{a}^\dagger|\varphi_0\rangle$ という状態を定義する。

(b) $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$|\varphi_1\rangle$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\varphi_0|\hat{x}|\varphi_1\rangle$, $\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_1\rangle$, $\langle\varphi_0|\hat{x}^3|\varphi_1\rangle$ を計算せよ。