試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2010 年 7 月 28 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2011 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 無限に長い一次元空間上の一つの粒子のある瞬間での状態が波動関数

$$\varphi(x) = f(x)\, e^{ikx} \tag{1}$$

で記述されるとする。ここで k は実定数であり、$f(x)$ は実数値をとる関数で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \{f(x)\}^2 = 1 \tag{2}$$

を満たし、$x \to \pm\infty$ で $f(x) \to 0$ となる。

運動量演算子を $\hat{p} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ とする。

(a) この状態における運動量 $\hat{p}$ の期待値を求めよ。

(b) この状態における運動量の二乗 $\hat{p}^2$ の期待値を求めよ。ただし、定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, f''(x)$ を A と書け。

2. 一般的な量子系を考える。ハミルトニアンを $\hat{H}$ として、その固有状態を $\boldsymbol{\psi}_j$ とする（$j = 1, 2, \ldots$）。つまり、

$$\hat{H}\, \boldsymbol{\psi}_j = E_j\, \boldsymbol{\psi}_j \tag{3}$$

である。時刻 t での系の状態を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}(t) = \hat{H}\, \boldsymbol{\varphi}(t) \tag{4}$$

に従う。

(a) 時刻 0 での状態が複素数 α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を用いて $\boldsymbol{\varphi}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, \boldsymbol{\psi}_j$ と書けるなら、一般の時刻での状態は

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, \exp\Big[-\frac{i\,E_j\,t}{\hbar}\Big] \, \boldsymbol{\psi}_j \tag{5}$$

と書けることを示せ。

(b) エネルギーの期待値 $\langle \boldsymbol{\varphi}(t), \hat{H}\,\boldsymbol{\varphi}(t) \rangle$ が時刻 t に依存しないことを示せ。

(c) $\hat{A}$ を $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ を満たす任意の自己共役（エルミート）演算子とする。期待値 $\langle \boldsymbol{\varphi}(t), \hat{A}\,\boldsymbol{\varphi}(t) \rangle$ が時刻 t に依存しないことを示せ。

3. $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を三次元での一つの粒子の位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, \hat{L}_{\mathrm{y}}]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{x}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{y}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{z}^2]$ を計算せよ。