試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2011 年 7 月 13 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2012 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 無限に長い一次元空間上の一粒子の量子力学を考える。ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) \tag{1}$$

で記述されるとする（$\alpha > 0$ は定数）。

(a) 波動関数 (1) が規格化されていることを確かめよ。

(b) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) における $\hat{x}$, $\hat{x}^2$, $\hat{p}$, $\hat{p}^2$ の期待値を求めよ。

(c) 上の結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \sqrt{\pi} \tag{2}$$

を証明抜きで用いていよい。

2. 一般的な量子系を考える。ハミルトニアンを $\hat{H}$ として、その固有状態を $\boldsymbol{\psi}_j$ とする（$j = 1, 2, \ldots$）。つまり、

$$\hat{H}\,\boldsymbol{\psi}_j = E_j\,\boldsymbol{\psi}_j \tag{3}$$

である。時刻 t での系の状態 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は時間発展についてのシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varphi}(t) = \hat{H}\,\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{4}$$

に従う。

(a) 時刻 0 での状態が $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\psi}_j$ だとする。一般の時刻での状態 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ を、$\boldsymbol{\psi}_j$, E_j, t などを用いて表わせ。

(b) 時刻 0 での状態が複素数 α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を用いて $\boldsymbol{\varphi}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, \boldsymbol{\psi}_j$ と書けるとする。上の結果を用いて一般の時刻での状態 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ を求めよ。

3. $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を三次元での一つの粒子の位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{L}_{\mathrm{y}}]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, (\hat{p}_{\mathrm{y}})^2]$ を計算せよ。

4. 水素原子の（より正確には、固定された陽子のまわりの電子の）エネルギー固有状態のシュレディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\varphi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{5}$$

である（定数の意味は講義のとおり）。

一般のエネルギー固有状態を求めるのは大変なので、以下では波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}\Bigr) \tag{6}$$

と書けるエネルギー固有状態を探そう。$a > 0$ はこれから決める定数である。

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z)$ および $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y,z)$ を求めよ。

(b) $\Delta\varphi(x,y,z)$ を求めよ。

(c) 波動関数 (6) をシュレディンガー方程式 (5) に代入し、等式が成立することを要請して定数 a を求めよ。また、エネルギー固有値 E を求めよ。