試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2012 年 7 月 25 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2013 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0.　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1.　1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は、$0 \le x \le L$ を満たす。

ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \tag{1}$$

で表わされるとする。$A > 0$ は規格化定数である。

(a) 波動関数 (1) が規格化されるように定数 A を決定せよ。

(b) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) における $\hat{x}, \hat{x}^2, \hat{p}, \hat{p}^2$ の期待値を求めよ。

(c) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\delta_x := \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ および運動量のゆらぎ $\delta_p := \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ を求めよ。その結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_\mathrm{x}, \hat{p}_\mathrm{y}, \hat{p}_\mathrm{z})$ を三次元での一つの粒子の位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_\mathrm{z}, \hat{L}_\mathrm{y}]$, $[\hat{L}_\mathrm{z}, \hat{y}^2]$ を計算せよ。

3. 単独の（大きさ 1/2 の）スピンの状態について考える。スピン演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_\mathrm{x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わし、一般のスピン状態を（複素数を成分にもつ）ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で表わす。

(a) 状態 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が演算子 $\hat{S}_\mathrm{x}$ の固有状態であることを確かめ、対応する固有値を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_\mathrm{y}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 演算子 $\hat{S}_\mathrm{d} := \dfrac{\hat{S}_\mathrm{x} + \hat{S}_\mathrm{z}}{\sqrt{2}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

4. 3 次元の調和振動子の（定常状態の）シュレディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) + \frac{\kappa}{2}(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

である。粒子の質量 m とバネ定数 κ は正の定数であり、E は（今のところ未知の）エネルギー固有値である。

以下では波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = e^{-a\,(x^2+y^2+z^2)} \tag{3}$$

と書けるエネルギー固有状態を探そう。$a > 0$ はこれから決める定数である。

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,z)$ および $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y,z)$ を求めよ。

(b) $\Delta\varphi(x,y,z)$ を求めよ。

(c) 波動関数 (3) をシュレディンガー方程式 (2) に代入し、等式が成立することを要請して定数 a とエネルギー固有値 E を求めよ。