試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2013 年 7 月 24 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2014 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 直線上の粒子のある瞬間の状態を表わす波動関数

$$\varphi(x) = f(x)\, e^{ikx} \tag{1}$$

を考える。ここで k は実定数であり、$f(x)$ は実数値をとる関数で、$x \to \pm\infty$ で $f(x) \to 0$ となる。また、$f(x)$ を含む定積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \{f(x)\}^2 = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, \{f(x)\}^2 = A, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \{f'(x)\}^2 = B \tag{2}$$

となるとする。A, B は正の定数である。

(a) この状態における位置 $\hat{x}$ の期待値を求めよ。

(b) この状態における運動量 $\hat{p}$ の期待値を求めよ。

(c) この状態における運動量の二乗 $\hat{p}^2$ の期待値を求めよ。

2. $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を三次元での一つの粒子の位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{y}}, \hat{L}_{\mathrm{x}}]$, $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, (\hat{p}_{\mathrm{y}})^2]$ を計算せよ。

3. 　単独の（大きさ 1/2 の）スピンの状態について考える。スピン演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わし、一般のスピン状態を（複素数を成分にもつ）ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_{\mathrm{x}}, \hat{S}_{\mathrm{y}}]$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とする。演算子（行列）$a\hat{S}_{\mathrm{x}} + b\hat{S}_{\mathrm{y}} + c\hat{S}_{\mathrm{z}}$ の固有値が $\pm\hbar/2$ であることを示せ。

4. 　3 次元での質量 m の自由粒子の（定常状態の）シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{3}$$

を考え、正の定数 R について、$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R$ なら $\varphi(x,y,z) = 0$ という境界条件を課す。

　定常状態の波動関数が、$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R$ のときには、

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\sin\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

と書けると仮定して、定数 $k > 0$ を求め、また、対応するエネルギー固有値 E を求めよ。

　一般の一変数関数 $f(r)$ について、

$$\Delta f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\bigg|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{5}$$

が成り立つことを証明なしで用いてよい。