試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2014 年 7 月 23 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2015 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は、$0 \le x \le L$ を満たす。

ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\!\Big(\frac{\pi}{L}\,x\Big) \tag{1}$$

で表わされるとする。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ および運動量のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{p}] := \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ を求めよ。その結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

2. $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, \hat{x}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, \hat{y}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, \hat{z}^2]$ および $[\hat{L}_{\mathrm{z}}, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{r}}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ である。

3. 単独の（大きさ 1/2 の）スピンの状態について考える。スピン演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わし、一般のスピン状態を（複素数を成分にもつ）ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{z}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_{\mathrm{y}}, \hat{S}_{\mathrm{z}}]$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{yz}} := (\hat{S}_{\mathrm{y}} + \hat{S}_{\mathrm{z}})/\sqrt{2}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 上で求めた $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ の固有状態のなかで固有値が最大のものを考える。この状態において、$\hat{S}_{\mathrm{yz}}, \hat{S}_{\mathrm{z}}, \hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定したとき、それぞれ、どのような値がどのような確率で得られるか答えよ（$\hat{S}_{\mathrm{x}}$ についての計算は面倒なので後回しにしたほうがいい）。

4. 水素原子の（より正確には、固定された陽子のまわりの電子の）エネルギー固有状態のシュレディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\varphi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

である（定数の意味は講義のとおり）。

一般のエネルギー固有状態を求めるのは大変なので、以下では波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}\Bigr) \tag{3}$$

と書けるエネルギー固有状態を探そう。$a > 0$ はこれから決める定数である。

(a) $\Delta\varphi(x,y,z)$ を求めよ（球対称な関数のラプラシアンについての公式を覚えている人はそれを使ってもいいが、公式を全く知らなくても地道に偏微分すればできる）。

(b) 波動関数 (3) をシュレディンガー方程式 (2) に代入し、等式が成立することを要請して、定数 a とエネルギー固有値 E を求めよ。