試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2016 年 7 月 27 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2017 年 1 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0.　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1.　1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は、$0 \le x \le L$ を満たす。

ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{3\pi}{L}\,x\Bigr) \tag{1}$$

で表わされるとする。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ および運動量のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{p}] := \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ を求めよ。その結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{y}}, \hat{x}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{y}}, \hat{y}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{y}}, \hat{z}^2]$ および $[\hat{L}_{\mathrm{y}}, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{r}}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ である。

3. r_0, r_1 を $0 < r_0 < r_1$ を満たす定数とする。3 次元での質量 m の自由粒子の（定常状態の）シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

において、$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r_0$ または $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq r_1$ なら $\varphi(x,y,z) = 0$ という境界条件を課す（つまり原点からの距離が r_0 以上 r_1 以下の領域以外には無限大のポテンシャルがある）。

定常状態（エネルギー固有状態）の波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin\bigl(k\,(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - r_0)\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & r_0 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r_1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3}$$

と書けるとする。波動関数の連続性に注意して定数 $k > 0$ の取りうる値を求めよ。さらに、(3) が $r_0 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r_1$ の領域で方程式 (2) を満たすことを示し、対応するエネルギー固有値 E を求めよ。

一般の一変数関数 $f(r)$ について、

$$\Delta f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

が成り立つことを証明なしで用いてよい。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピンの状態について考える。スピン演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わし、一般のスピン状態を（複素数を成分にもつ）ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_{\mathrm{x}}, \hat{S}_{\mathrm{y}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}} + \hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 上で求めた $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有状態のなかで固有値が最大のものを考える。この状態において、$\hat{S}_{\mathrm{y}}, \hat{S}_{\mathrm{z}}, \hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定したとき、それぞれ、どのような値がどのような確率で得られるか答えよ。