試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 II	2017 年 7 月 26 日	水	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2017 年 10 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は、$0 \le x \le L$ を満たす。

ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\!\left(\frac{\pi}{L}\,x\right) \tag{1}$$

で表わされるとする。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_\varphi$, $\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi$, $\langle\hat{p}\rangle_\varphi$, $\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi - (\langle\hat{x}\rangle_\varphi)^2}$ および運動量のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{p}] := \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi - (\langle\hat{p}\rangle_\varphi)^2}$ を求めよ。その結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

2. $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知とする。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{x}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{y}^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{z}^2]$ および $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{r}}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ である。

3. 2次元の「水素原子」のエネルギー固有状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y) - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\varphi(x,y) = E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

を考えよう（我々の世界は3次元だがある種の半導体の界面でこの方程式で近似的に記述される系を作ることができる）。変数 $x,\ y$ はいずれも実数全体を動く。$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ は2次元のラプラシアンである。$m > 0$ は粒子の質量であり、$k > 0$ は定数である。

波動関数が

$$\varphi(x,y) = \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right) \tag{3}$$

と書けるエネルギー固有状態を探そう。$a > 0$ はこれから決める定数である。

(a) 波動関数 (3) について $\Delta\varphi(x,y)$ を求めよ（2次元のラプラシアンの極座標表示を覚えている人はそれを使ってもいいが、公式を全く知らなくても地道に偏微分すれば簡単にできる）。

(b) 波動関数 (3) をシュレディンガー方程式 (2) に代入し、等式が成立することを要請して、定数 a とエネルギー固有値 E を求めよ。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピンの状態について考える。スピン演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わし、一般のスピン状態を（複素数を成分にもつ）ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ で表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_{\mathrm{z}}, \hat{S}_{\mathrm{x}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{x}} + \hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 状態 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$（ただし $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$）において、$\hat{S}_{\mathrm{z}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を測定したとき、それぞれ、どのような値がどのような確率で得られるか答えよ。