量子力学 II 試験について　田崎晴明

- 問題は 3 ページから始まる。**試験開始までは問題を読まないこと。**（2 ページ目までには事前に目を通しておくこと。）
- まず、試験の準備をする。
  - 試験問題を参照できるようにする（印刷してもいいし、PC やタブレットなどで見られるようにしてもいい）。まだ見てはいけない。
  - 解答用紙を用意する。普通のレポート用紙でよい。問題は全部で 4 問なので、それぞれの問題の解答用紙の一枚目に問題番号、学籍番号、氏名をあらかじめ記入しておく。
  - 計算用紙を用意する。分量は自由。
  - 筆記用具も用意する。
- 自分で都合のよい時間をとり、正確に 90 分間の時間を測って受験する。「持ち込み不可」の試験と同じように問題文以外は何も参照してはいけない。もちろん、直接、間接に他人と相談してはいけない。試験中の質問は受け付けない（すみません）。
- 試験中に飲み食いしたりトイレに行ったりするのは自由（暑い時期だし水分はこまめに補給しましょう）。ただし、そのための時間延長はしないこと。
- 試験時間が終わったら答案を修正してはいけない。指示に従って答案を専用アドレス `hal.tasaki.qm23@gmail.com` に送付する。**今までのアドレスと異なっていることに注意！**　もちろん答案の送付に使う時間は試験時間に含めないが、締め切りは 8 月 13 日の正午なので余裕を持って受験すること。
- 遅れて提出する人がいるかもしれないので、8 月 19 日までは試験の内容について LINE や SNS などで他人に見える形に書いてはいけない。
- 以上の注意に反した場合には不正行為とみなされて処分の対象となることがある。

以下は問題ページ冒頭の注意だが、事前に読んでおくこと。

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 4 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールで専用アドレス `hal.tasaki.qm23@gmail.com` に送ること（**今までのアドレスと異なっていることに注意！**）。メールの件名は、問題番号を入れてそれぞれ `qm2:ex1`, `qm2:ex2`, `qm2:ex3`, `qm2:ex4` とする。また、メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を明記すること。

- 締め切りは 8 月 13 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

量子力学 II 試験問題　2020 年 8 月 12 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 4 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールで専用アドレス `hal.tasaki.qm23@gmail.com` に送ること（**今までのアドレスと異なっていることに注意！**）。メールの件名は、問題番号を入れてそれぞれ `qm2:ex1`, `qm2:ex2`, `qm2:ex3`, `qm2:ex4` とする。また、メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を明記すること。
- 締め切りは 8 月 13 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

1.　1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は $0 \le x \le L$ を満たす。ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{n\pi}{L}\,x\Bigr) \tag{1}$$

で表わされるとする。ここで $n = 1, 2, \ldots$ は定数である。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_\varphi$, $\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi$ を求めよ。
(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi - (\langle\hat{x}\rangle_\varphi)^2}$ を求めよ。
(c) n を大きくする極限でゆらぎはどのように振る舞うか。また、そのような振る舞いが見られる理由を述べよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_\mathrm{x}, \hat{p}_\mathrm{y}, \hat{p}_\mathrm{z})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知として用いてよい。

交換子 $[\hat{L}_\mathrm{x}, (\hat{p}_\mathrm{x})^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{x}, (\hat{p}_\mathrm{y})^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{x}, (\hat{p}_\mathrm{z})^2]$ および $[\hat{L}_\mathrm{x}, \hat{\boldsymbol{p}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{p}}^2 := (\hat{p}_\mathrm{x})^2 + (\hat{p}_\mathrm{y})^2 + (\hat{p}_\mathrm{z})^2$ である。

3. 2次元の「水素原子」のエネルギー固有状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y) - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\varphi(x,y) = E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

を考えよう（我々の世界は3次元だがある種の半導体の界面でこの方程式で近似的に記述される系を作ることができる）。変数 x, y はいずれも実数全体を動く。$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ は2次元のラプラシアンである。$m > 0$ は粒子の質量であり、$k > 0$ は定数である。

波動関数が

$$\varphi(x,y) = \exp\Bigl(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\Bigr) \tag{3}$$

と書けるエネルギー固有状態を探そう。$a > 0$ はこれから決める定数である。

(a) 波動関数 (3) について $\Delta\varphi(x,y)$ を求めよ（2次元のラプラシアンの極座標表示を覚えている人はそれを使ってもいいが、公式を全く知らなくても地道に偏微分すれば簡単にできる）。

(b) 波動関数 (3) をシュレディンガー方程式 (2) に代入し、等式が成立することを要請して、定数 a とエネルギー固有値 E を求めよ。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピン角運動量演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_\mathrm{x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わす。

(a) $\hat{S}_\mathrm{x}\hat{S}_\mathrm{z}$ および $\hat{S}_\mathrm{z}\hat{S}_\mathrm{x}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_\mathrm{x}, \hat{S}_\mathrm{z}]$ および $\hat{S}_\mathrm{x}\hat{S}_\mathrm{z} + \hat{S}_\mathrm{z}\hat{S}_\mathrm{x}$ を求めよ。

実定数 θ について $\hat{S}_\theta = \cos\theta\,\hat{S}_\mathrm{z} + \sin\theta\,\hat{S}_\mathrm{x}$ とする。また、$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ という状態を考える。

(b) $|\varphi\rangle$ が $\hat{S}_\theta$ の固有状態であることを示し、対応する固有値を求めよ。

(c) 状態 $|\varphi\rangle$ において $\hat{S}_\theta$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(d) 状態 $|\varphi\rangle$ において $\hat{S}_\mathrm{z}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(e) 状態 $|\varphi\rangle$ において $\hat{S}_\mathrm{x}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。